PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá escoger una de las dos opciones y desarrollar las preguntas de la misma. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que se puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Una conocida cadena de ropa ha rebajado sus precios. Un pantalón, una camisa y un abrigo valían en temporada 360 euros en total. En las primeras rebajas, el pantalón se rebajó un 10 % y la camisa un 20 %, con lo que un cliente podía llevarse ambas prendas por 137 euros. En las segundas rebajas, y sobre el precio de temporada, el pantalón se rebajó un 20 % y el abrigo un 30 %, por lo que juntos costaban 212 euros. Calcula el precio de cada prenda en temporada.

Sean p, c, a los precios de temporada de una camisa, un pantalón y un abrigo, respectivamente.

El sistema que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} p+c+a=360 \\ 0{,}9p+0{,}8c=137 \\ 0{,}8p+0{,}7a=212 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} p+c+a=360 \\ 9p+8c=1.370 \\ 8p+7a=2.120 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 360 & 1 & 1 \\ 1.370 & 8 & 0 \\ 2.120 & 0 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 7 \end{vmatrix}}=\frac{20.160-16.960-9.590}{56-64-63}=\frac{20.160-26.550}{56-127}=\frac{-6.390}{-71}=90.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 360 & 1 \\ 9 & 1.370 & 0 \\ 8 & 2.120 & 7 \end{vmatrix}}{-71}=\frac{9590+19.080-10.960-22680}{-71}=\frac{28.670-33.600}{-71}=\frac{-4.970}{-71}=70.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 360 \\ 9 & 8 & 1.370 \\ 8 & 0 & 2.120 \end{vmatrix}}{-71} = \frac{16.960+10.960-23.040-19.080}{-71} = \frac{27.920-42.120}{-71} = \frac{-14.200}{-71} = 200.$$

$\underline{En\ temporada\ el\ pantalón, la\ camisa\ y\ el\ abrigo\ valían, 70, 90\ y\ 200\ euros.}$

(respectivamente)

****

2º) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4-x^2} & si \ \ 0 < x < 2 \\ 2x & si \ \ 2 \leq x < 4 \end{cases}$.

a) Estudia razonadamente su continuidad.

b) Calcula el área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[2, 3]$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 2$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{0} = \infty \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} (2x) = 4 = f(2) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x).$$

$$\underline{f(x) \ es \ discontinua \ en \ x = 2 \ con \ una \ discontinuidad \ de \ salto \ infinito}.$$

b)

En el intervalo $[2, 3]$ la función es $f(x) = 2x$, cuyas ordenadas en el intervalo son todas positivas.

La superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_2^3 f(x) \cdot dx = \int_2^3 (2x) \cdot dx = 2 \cdot \int_2^3 x \cdot dx = 2 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = [x^2]_2^3 =$$

$$= 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5.$$

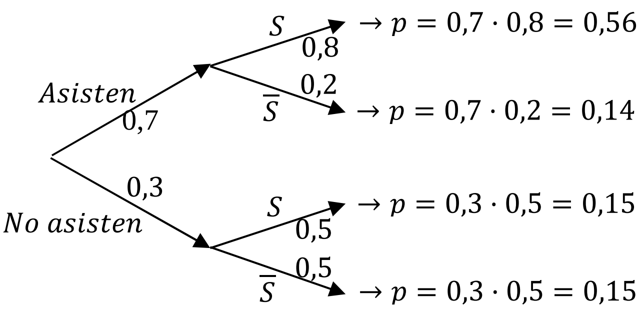
$$\underline{S = 5 \ u^2}.$$

****

3º) En una asignatura de primer curso de un grado universitario, asisten a clase regularmente 210 alumnos de los 300 alumnos matriculados. Al finalizar el periodo docente, superan la asignatura el 80 % de los alumnos que existen regularmente a clase y el 50 % de los alumnos que no asisten regularmente a clase. Se elige un alumno matriculado al azar:

a) Calcula la probabilidad de que haya superado la asignatura y no haya asistido regularmente a clase.

b) Sabiendo que ha superado la asignatura, ¿cuál es la probabilidad de que haya asistido regularmente a clase?



a)

$$P = P(\overline{A}/S) = P(\overline{A}) \cdot P(S/\overline{A}) = 0,3 \cdot 0,5 = \underline{0,15}.$$

b)

$$P = P(A/S) = \frac{P(S \cap A)}{P(S)} = \frac{P(A) \cdot P(S/A)}{P(A) \cdot P(S/A) + P(\overline{S}) \cdot P(S/\overline{A})} = \frac{0,7 \cdot 0,8}{0,7 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,5} = \frac{0,56}{0,56 + 0,15} =$$

$$= \frac{0,56}{0,71} = \underline{0,7887}.$$

****

4º) En un grupo de 8 amigos se encuentran los tres agraciados con un viaje para visitar Lisboa sorteado por la embajada portuguesa. Si hay 4 amigos que ya han visitado Lisboa, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de los agraciados haya visitado Lisboa?

Aplicando la regla de Laplace: $P = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles}$.

$$P = \frac{C_{4,3}}{C_{8,3}} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{\frac{4!}{(4-3)!\cdot 3!}}{\frac{8!}{(8-3)!\cdot 3!}} = \frac{\frac{4\cdot 3!}{1!\cdot 3!}}{\frac{8!}{5!\cdot 3!}} = \frac{4}{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 6}} = \frac{4\cdot 6}{8\cdot 7\cdot 6} = \frac{1}{2\cdot 7} = \underline{\frac{1}{14} = 0{,}0714.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Una empresa dispone de dos talleres para la reparación de motos y coches. El primero de los talleres dispone de 300 horas de trabajo como máximo y necesita 6 horas para reparar cada moto y 5 horas para cada coche. El segundo de los talleres dispone de 200 horas de trabajo como máximo y necesita 2 horas para reparar cada moto y 5 horas para cada coche. El beneficio neto que obtiene la empresa por cada moto reparada es de 1.000 euros mientras que el beneficio neto que obtiene por cada choche reparado es de 1.500 euros. Calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cuántos coches y motos ha de reparar para obtener el máximo beneficio neto. ¿Cuál es ese beneficio neto máximo?

Sean $x\ e\ y$ el número de motos y coches, respectivamente, que se reparan en los dos talleres.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 6x+5y\le 300 \\ 2x+5y\le 200 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}.$

La región factible se indica sombreada en la figura adjunta.

① $\Rightarrow 6x+5y\le 300 \Rightarrow y\le \frac{300-6x}{5} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	50
y	60	0

② $\Rightarrow 2x+5y\le 200 \Rightarrow y\le \frac{200-2x}{5} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	50
y	40	20

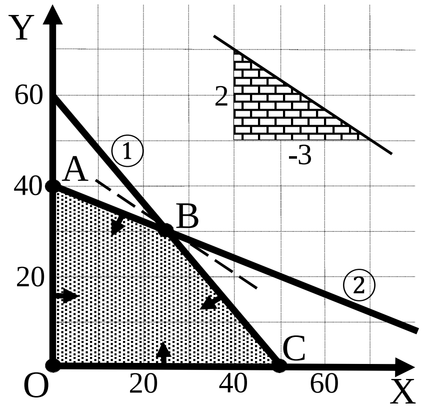
Los vértices de la sección factible, además del origen, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 2x+5y=200 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,40).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 6x+5y=300 \\ 2x+5y=200 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 6x+5y=300 \\ -2x-5y=-200 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x=100;\ \ x=25 \Rightarrow B(25,30).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 6x+5y=300 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow C(50,0).$



La función de objetivos es $f(x,y)=1.000x+1.500y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,40)=1.000\cdot 0+1.500\cdot 40=0+60.000=60.000.$

$B \Rightarrow f(25,30)=1.000\cdot 25+1.500\cdot 30=25.000+45.000=70.000.$

$C \Rightarrow f(50, 0) = 1.000 \cdot 50 + 1.500 \cdot 0 = 50.000 + 0 = 50.000.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 1.000x + 1.500y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1.000}{1.500}x = -\frac{2}{3}x \Rightarrow \boldsymbol{m} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}.$$

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ neto\ se\ obtiene\ reparando\ 25\ motos\ y\ 30\ coches.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ neto\ es\ de\ 70.000\ euros.}$$

****

2º) Halla razonadamente dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

Sean los números reales $x > 0 \; e \; y > 0$.

$x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x.$

$P(x, y) = x^2 \cdot y^2 \Rightarrow Máximo.$

$P(x) = x^2 \cdot (10 - x)^2 = (10x - x^2)^2.$

Una función polinómica tiene un máximo en un punto cuando se anula su primera derivada y es negativa su segunda derivada en ese punto:

$P'(x) = 2 \cdot (10x - x^2) \cdot (10 - 2x) = 4x \cdot (10 - x) \cdot (5 - x).$

$P'(x) = 0 \Rightarrow 4x \cdot (10 - x) \cdot (5 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 10.$

Es evidente que las soluciones $x = 0 \; y \; x = 10$ carecen de sentido por producir el producto mínimo; no obstante se justifica a continuación la condición de máximo para $x = 5$.

$P''(x) = 4(10 - x) \cdot (5 - x) + 4x \cdot (-1) \cdot (5 - x) + 4x \cdot (10 - x) \cdot (-1) =$

$= 4 \cdot (x^2 - 15x + 50) - 4x \cdot (5 - x) - 4x(10 - x) =$

$= 4x^2 - 60x + 200 - 20x + 4x^2 - 40x + 4x^2 = 12x^2 - 120x + 200 =$

$= 4 \cdot (3x^2 - 30x + 50).$

$P''(0) = 200 > 0 \Rightarrow Para \; mínimo.$

$P''(5) = 4 \cdot (75 - 150 + 50) = -100 < 0 \Rightarrow Máximo \; para \; x = 5.$

$P''(10) = 4 \cdot (300 - 300 + 50) = 200 > 0 \Rightarrow Para \; mínimo.$

Para $x = 5 \Rightarrow y = 10 - 5 = 5.$

$\underline{Los \; números \; reales \; que \; cumplen \; la \; condición \; pedida \; son \; x = y = 5.}$

****

3º) Una granja cultiva perlas cuyos diámetros siguen una distribución normal con media μ mm y desviación típica $\sigma = 0,8\ mm$. Se quiere comprobar el comportamiento de las especificaciones exigidas por una joyería en la elaboración de sus collares. Para ello se elige una muestra representativa de 256 perlas, resultando un diámetro medio muestral de 9,92 mm.

a) Calcula el intervalo de confianza para el diámetro medio poblacional de las perlas con un nivel de confianza del 90 %.

b) Calcula el tamaño necesario de la muestra de perlas que permita alcanzar, con una confianza del 98 %, un error máximo de 0,2 mm en la estimación del diámetro medio poblacional de una perla.

----

a)

$1-\alpha = 0,90 \ \rightarrow\ \alpha = 1-0,90 = 0,10 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = \mathbf{1,645}.$

$(1-0,05 = 0,9500 \ \rightarrow z = 1,645).$

Datos: $n = 256;\ \ \overline{x} = 9,92;\ \sigma = 0,8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(9,92 - 1,645 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{256}};\ 9,92 + 1,645 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{256}}\right);$

$(9,92 - 1,645 \cdot 0,05;\ 9,92 + 1,645 \cdot 0,05);\ (9,92 - 0,0823;\ 9,92 + 0,0823).$

$$\underline{I.C._{90\ \%} = (9,8378;\ 10,0023).}$$

b)

$1-\alpha = 0,98 \ \rightarrow\ \alpha = 1-0,98 = 0,02 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,01} = \mathbf{2,33}.$

$1-0,01 = 0,99 \ \rightarrow z = 2,33).$

Datos: $\sigma = 0,8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,33;\ \ E = 0,2.$

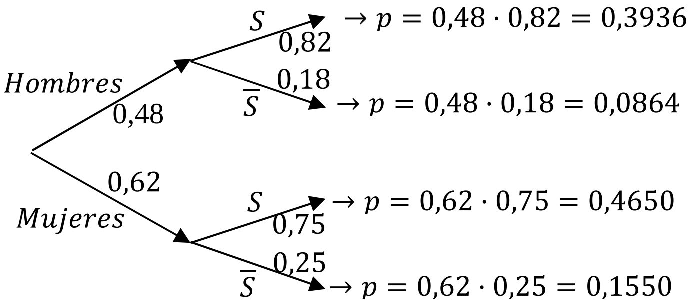
Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow\ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,33 \cdot \frac{0,8}{0,2}\right)^2 =$

$= (2,33 \cdot 4)^2 = 9,32^2 = 86,86.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 87\ perlas.}$$

****

4º) El 48 % de los trabajadores de una empresa son hombres. Si en esa empresa, el 82 % de los hombres y el 75 % de las mujeres están satisfechos con su trabajo, ¿qué porcentaje de trabajadores está satisfecho con su trabajo en esa empresa?



$$P = P(S) = P(H) \cdot P(S/H) + P(M) \cdot P(S/M) = 0{,}48 \cdot 0{,}82 + 0{,}62 \cdot 0{,}75 =$$

$$= 0{,}3936 + 0{,}4650 = \underline{0{,}8586}.$$

$$\underline{Están\ satisfechos\ con\ su\ trabajo\ el\ 85{,}86\ \%\ de\ los\ trabajadores}.$$

****