PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá escoger una de las dos opciones y desarrollar las preguntas de la misma. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que se puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Para realizar una excursión, un IESO no puede utilizar más de 5 autobuses de 55 plazas cada uno, ni más de 9 microbuses de 33 plazas cada uno. El coste de cada autobús se eleva a 500 euros, mientras que el coste de cada microbús es de 300 euros. Además, han de viajar 3 profesores en cada autobús y 2 en cada microbús. Si como mucho hay 27 profesores que pueden participar en la excursión y el coste del transporte no puede exceder de 4.300 euros, utiliza técnicas de programación lineal para determinar el número de autobuses y microbuses que han de contratarse para que el número de alumnos que puedan ir de excursión sea máximo. ¿A cuánto asciende ese número de alumnos?

Sean x e y el número de autobuses y microbuses, respectivamente, que utiliza el IES para realizar la excursión.

El conjunto de restricciones es: $\left.\begin{array}{c} 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq x \leq 9 \\ 3x + 2y \leq 27 \\ 500x + 300y \leq 4.300 \end{array}\right\} o: \left.\begin{array}{c} x \leq 5,\ y \leq 9 \\ 3x + 2y \leq 27 \\ 5x + 3y \leq 43 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$

La función de objetivos es la siguiente: $F(x, y) = 55x + 33y$.

$① \Rightarrow 3x + 2y \leq 27 \Rightarrow y \geq \frac{27-3x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	9	3
y	0	9

$② \Rightarrow 5x + 3y \leq 43 \Rightarrow y \leq \frac{43-5x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	5	8
y	6	1

La región factible se indica en la figura.

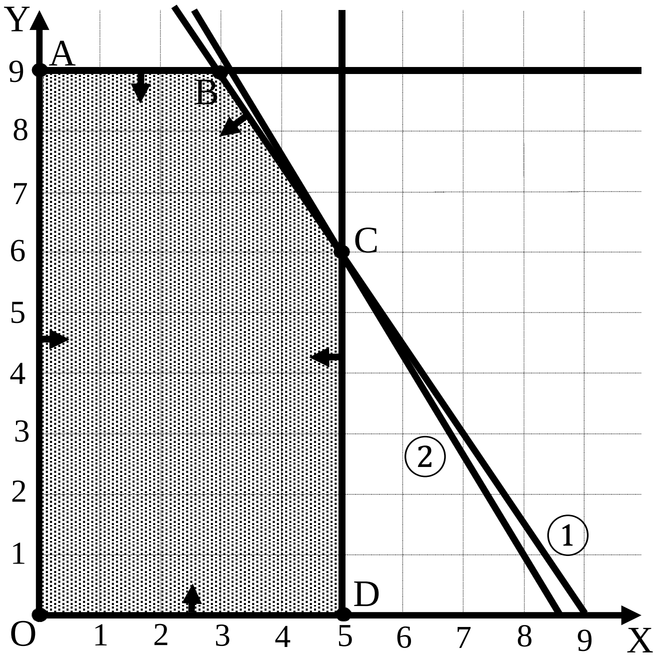
Los vértices de la zona factible, además del origen, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 9 \\ x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A(0, 9).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x + 2y = 27 \\ y = 9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B(3, 9).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 5 \\ 5x + 3y = 43 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C(5, 6).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 5 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow D(5, 0).$$



Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0, 9) = 55 \cdot 0 + 33 \cdot 9 = 0 + 297 = 297.$$

$$B \Rightarrow f(3, 9) = 55 \cdot 3 + 33 \cdot 9 = 165 + 297 = \mathbf{462}.$$

$$C \Rightarrow f(5, 6) = 55 \cdot 5 + 33 \cdot 6 = 165 + 198 = 363.$$

$$D \Rightarrow f(5, 0) = 55 \cdot 5 + 33 \cdot 0 = 275 + 0 = 275.$$

$$\underline{Deben\ utilizarse\ 3\ autobuses\ y\ 9\ microbuses.}$$

$$\underline{El\ máximo\ número\ de\ estudiantes\ que\ pueden\ ir\ de\ excursión\ son\ 462\ .}$$

****

2º) Calcula los valores de los parámetros a, b y c en la función $y = ax^3 - bx + c$, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y que tiene un máximo relativo en el punto $P(1, 4)$.

Por pasar por el origen: $y_{(0)} = 0 \Rightarrow \underline{c = 0}$.

La función resulta $y = f(x) = ax^3 - bx$.

Por contener $y = f(x) = ax^3 - bx$ al punto $P(1, 4) \Rightarrow f(1) = 4$:

$f(1) = a \cdot 1^3 - b \cdot 1 = \boldsymbol{a - b = 4}$. (1)

Por tener $y = f(x) = ax^3 - bx$ un máximo relativo en $P(1, 4) \Rightarrow f'(1) = 0$:

$f'(x) = 3ax^2 - b \Rightarrow f'(1) = 3a \cdot 1^2 - b = \boldsymbol{3a - b = 0}$. (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a - b = 4 \\ 3a - b = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -a + b = -4 \\ 3a - b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a = -4;\ \underline{a = -2},\ \underline{b = -6}.$$

****

3º) La probabilidad de que un socio de un club vaya a la playa de vacaciones es 0,9. Si el club tiene 60 socios, calcula, utilizando la aproximación a la distribución normal apropiada, la probabilidad de que como mucho 50 socios vayan a la playa de vacaciones.

$$Para\ n = 60 \rightarrow \begin{Bmatrix} p = 0,9 \\ q = 0,1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \hat{P} = N\left(0'9, \sqrt{\frac{0,9 \cdot 0,1}{60}}\right) = N\left(0'9, \sqrt{\frac{0,09}{60}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{P} = N(0'9, 0'039).$$

$$P = \frac{50}{60} = 0,83.$$

$$P\left(\hat{P} \leq \frac{50}{60}\right) = P\left(\hat{P} < 0,83\right) = P\left(\frac{\hat{P} - 0,9}{0,039} \leq \frac{0,83 - 0,9}{0,039}\right) = P\left(Z \leq \frac{-0,07}{0,039}\right) =$$

$$= P(Z \leq -1,79) = 1 - P(Z < 1,79) = 1 - 0,9633 = \underline{0,0367}.$$

****

4º) El 30 % de los despidos laborales de una empresa son improcedentes. Si la empresa despide a 3 trabajadores hoy, ¿cuál es la probabilidad de que hoy ningún despido sea improcedente?

La probabilidad de que un despido sea improcedente es: $P(i) = 0{,}3$.

La probabilidad de que un despido sea procedente es: $P(p) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

$P = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = (0{,}7)^3 = 0{,}343$.

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ ning\acute{u}n\ despido\ de\ hoy\ sea\ improcedente\ es\ 0{,}343.}$

****

OPCIÓN B

1º) Una editorial va a lanzar al mercado tres ediciones $L_1, L_2\ y\ L_3$ de libros de bolsillo. Los costes por unidad de cada libro son 7, 5 y 6 euros, respectivamente. El coste total de las tres ediciones asciende a 37.500 euros. Se sabe que el número de ejemplares de L_3 es igual a dos séptimos del número de ejemplares de L_2, y que, si al triple del número de ejemplares de L_1 se le suma el número de ejemplares de L_3, se obtiene el doble del número de ejemplares de L_2. Calcula cuántos libros de cada tipo se han editado.

Siendo x, y, z los libros lanzados por las ediciones $L_1, L_2\ y\ L_3$, respectivamente, del enunciado del ejercicio se deduce el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 7x+5y+6z=37.500 \\ z=\frac{2}{7}y \\ 3x+z=2y \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{r} 7x+5y+6z=37.500 \\ 2y-7z=0 \\ 3x-2y+z=0 \end{array}\right\}.$$

De la segunda ecuación: $2y=7z \rightarrow y=\frac{7}{2}z=3{,}5z$.

Sustituyendo en la 3ª ecuación: $3x-7z+z=0;\ \ 3x-6z=0 \Rightarrow x=2z$.

Sustituyendo en la 1ª ecuación los valores obtenidos de x e y en función de z:

$7\cdot 2z+5\cdot 3{,}5z+6z=37.500;\ \ 14z+17{,}5z+6z=37.500;$

$37{,}5z=37.500 \Rightarrow z=1.000, x=2.000\ e\ y=3.500.$

$\underline{Se\ han\ editado\ 2.000, 3.500\ y\ 1.000\ libros\ de\ L_1, L_2\ y\ L_3, respectivamente.}$

****

2º) Consideramos la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + b & si \quad x \le -1 \\ 3x^2 + 4 & si \ -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & si \ x \ge 1 \end{cases}$.

$a)$ Calcula el valor del parámetro b para que $f(x)$ sea continua.

$b)$ Para b = 6 estudia la derivabilidad de $f(x)$ en $[0, 2]$ y representa su gráfica.

$a)$

Por ser $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 = f(1)$, la función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = -1$, que se va a obtener el correspondiente valor de b para que lo sea.

Para que la función sea continua en $x = -1$ es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1} \left(\frac{1}{x^2} + b \right) = f(-1) = 1 + b \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1} (3x^2 + 4) = 3 + 4 = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + b = 7 \Rightarrow \boldsymbol{b = 6}.$$

$\underline{La \ función \ f(x) \ es \ continua \ en \ R \ para \ b = 6.}$

La función resulta $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + 6 & si \quad x \le -1 \\ 3x^2 + 4 & si \ -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & si \ x \ge 1 \end{cases}$.

$b)$

Un función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales; una función es derivable en un intervalo cuando lo es en todos y cada uno de los puntos del intervalo.

La función $f(x)$ es derivable en $[0, 2]$ por ser polinómica, excepto para x = 1 cuya derivabilidad es dudosa y se estudia a continuación:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x^3} + 6 & si \ x \le -1 \\ 6x & si \ -1 < x < 1 \\ -3x^2 & si \ x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow f'(1^-) = 6 \neq f'(1^+) = -3.$$

$\underline{La \ función \ f(x) \ es \ derivable \ en \ [0, 2], excepto \ para \ x = 1.}$

Para la representación de la función tenemos en cuenta que en su intervalo $(-\infty, -1]$ se trata de la expresión $g(x) = \frac{1}{x^2} + 6$, que es creciente en su dominio, por ser $g'(x) = \frac{-2}{x^3} > 0, \forall x \in (-\infty, -1]$.

Tiene como asíntota horizontal en este intervalo a la recta de ecuación $y = 6$ por ser $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x^2} + 6 \right) = \frac{1}{\infty} + 6 = 0 + 6 = 6$.

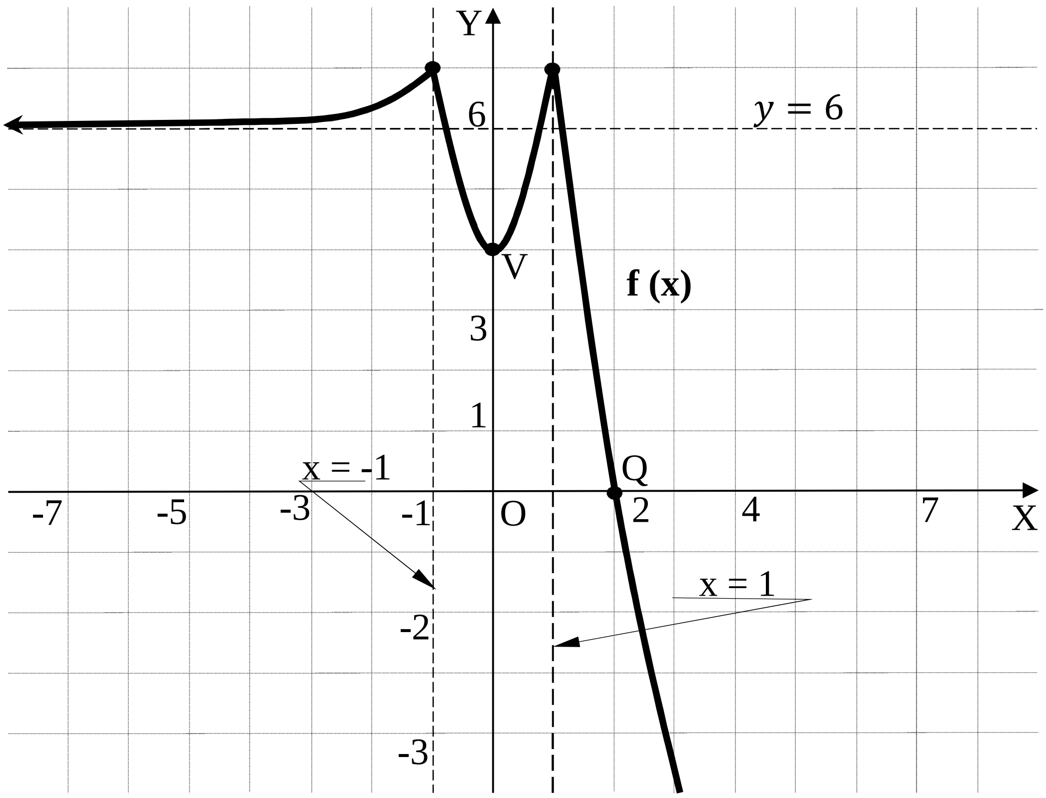
En el intervalo $(-1, 1)$ tiene la expresión $h(x) = 3x^2 + 4$, que es una parábola convexa $(\cup)$ que tiene su vértice en el punto $V(0, 4)$ y es simétrica con respecto al eje Y por ser $h(x) = h(-x)$.

En el intervalo $[1, +\infty)$ tiene por expresión $i(x) = -x^3 + 8$, que es decreciente en su dominio, por ser $i'(x) = -3x^2 < x, \forall \in [1, +\infty)$.

$i(x) = 0 \Rightarrow -x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Corta al eje X en el punto $Q(2, 0)$.

La representación gráfica es, aproximadamente, la siguiente:

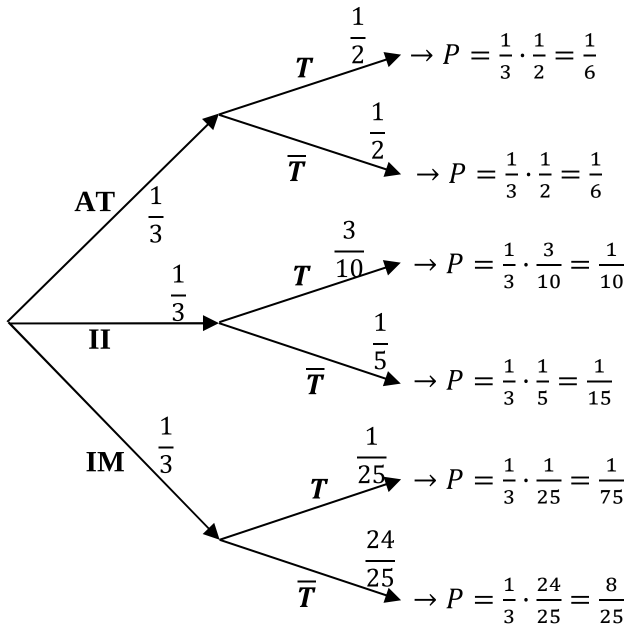


****

3º) En una Escuela Politécnica se imparten tres grados: Arquitectura Técnica, Ingeniería Informática e Ingeniería Mecánica. Un estudio, realizado sobre 60 alumnos de cada grado, revela que han terminado sus estudios en cuatro años el 5 % de los alumnos de Ingeniería Mecánica, el 30 % de Ingeniería Informática y el 50 % de Arquitectura Técnica. Se elige un estudiante al azar:

a) Calcula la probabilidad de que haya terminado sus estudios en cuatro años.

b) Calcula la probabilidad de que sea alumno de Ingeniería Mecánica y haya terminado sus estudios en cuatro años.



a)

$$P = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{75} = \frac{25+15+2}{150} = \frac{42}{150} = \underline{\frac{7}{25}}.$$

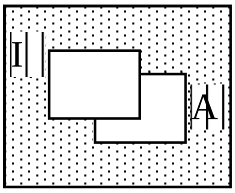
b)

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{25} = \underline{\frac{1}{75}}.$$

****

4º) El 78 % de los universitarios estudia inglés, el 23 % estudia alemán y el 15 % estudia ambos idiomas. Calcula la probabilidad de encontrar un universitario que no estudie ninguno de los dos idiomas.

Datos: $P(I) = 0{,}78,\ P(A) = 0{,}23,\ P(I \cap A) = 0{,}15 \Rightarrow ¿P(\overline{I} \cap \overline{A})$?



$$P = P(\overline{I} \cap \overline{A}) = 1 - P(I \cup A) = 1 - [P(I) + P(A) - P(I \cap A)] =$$

$$= 1 - (0{,}78 + 0{,}23 - 0{,}15) = 1 - (1{,}01 - 0{,}15) = 1 - 0{,}86 = \underline{0{,}14}.$$

****