PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá escoger una de las dos opciones y desarrollar las preguntas de la misma. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que se puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Se considera el sistema $\left.\begin{array}{r} x+y-z=a \\ ax+2y-z=3a \\ 2x+ay-z=6 \end{array}\right\}$, dependiente del parámetro real a:

a) Clasifica el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a.

b) Resuelve el sistema para $a=2$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & 2 & -1 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ a & 2 & -1 & 3a \\ 2 & a & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & 2 & -1 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix}=-2-a^2-2+4+a+a=-a^2+2a=$$

$$=-a(a-2)=0 \Rightarrow a_1=0, a_2=2.$$

$$\underline{Para \left\{\begin{array}{l} a \neq 0 \\ a \neq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0 \ \Rightarrow \ A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \ \Rightarrow \ \{C_1, C_3, C_4\} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 = 0 \;\Rightarrow Rang\ A' = 2.$$

$$Para\ a = 2 \;\Rightarrow\; A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow (,C_4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 9 & 4 & -12 \end{vmatrix} = -24 + 24 - 36 + 36 = 0 \;\Rightarrow Rang\ A' = 2.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a = 0 \\ a = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incog. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $a = 2$ el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 2 \\ 2x + 2y - z = 6 \\ 2x + 2y - z = 6 \end{array}\right\}$, equivalente al siguiente sistema: $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 2 \\ 2x + 2y - z = 6 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado.

Haciendo $y = \lambda$, resulta:

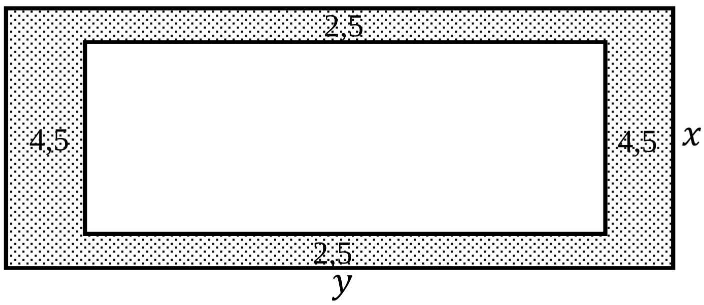
$$\left.\begin{array}{r} x - z = 2 - \lambda \\ 2x - z = 6 - 2\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -x + z = -2 + \lambda \\ 2x - z = 6 - 2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow x = 4 - \lambda.\ z = x - 2 + \lambda =$$

$$= 4 - \lambda - 2 + \lambda = 2.$$

$$\underline{Solución: x = 4 - \lambda, y = \lambda, z = 0, \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) En una tarjeta de visita rectangular y de 4.500 mm^2 de superficie, la zona destinada a la escritura está delimitada por los márgenes superior, inferior, derecho e izquierdo. Si los márgenes superior e inferior son de 2,5 mm cada uno y los márgenes derecho e izquierdo son de 4,5 mm cada uno, determina las dimensiones de la tarjeta para que la superficie de la zona destinada a la escritura sea máxima.



$$S = x \cdot y \;\Rightarrow Mínima.$$

$$(x-9)(y-5) = 4.500;$$

$$xy - 5x - 9y + 45 = 4.500;$$

$$xy - 9y = 5x + 4.455;\;\; y(x-9) = 5x + 4.455 \Rightarrow y = \frac{5x+4.455}{x-9}.$$

Sustituyendo el valor de y en la superficie:

$$S = x \cdot y = x \cdot \frac{5x+4455}{x-9} = \frac{5x^2+4.455x}{x-9}.$$

Para que la superficie sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$S'(x) = \frac{(10x+4.455)\cdot(x-9)-(5x^2+4.455x)\cdot 1}{(x-9)^2} = \frac{10x^2-90x+4.455x-40.095-5x^2-4.455x}{(x-9)^2} =$$

$$= \frac{5x^2-90x-40.095}{(x-9)^2} = 5 \cdot \frac{x^2-18x-8.019}{(x-9)^2}.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 5 \cdot \frac{x^2-18x-8.019}{(x-9)^2} = 0;\;\; x^2 - 18x - 8.019 = 0;$$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{324+32.076}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{32.400}}{2} = \frac{18 \pm 180}{2} = 9 \pm 90 \Rightarrow x_1 = 99, x_2 = -81.$$

La solución negativa carece de sentido, por lo cual: $x = 99$.

$$y = \frac{5 \cdot 99 + 4.455}{99-9} = \frac{495+4.455}{90} = \frac{4950}{90} = \frac{495}{9} = 55.$$

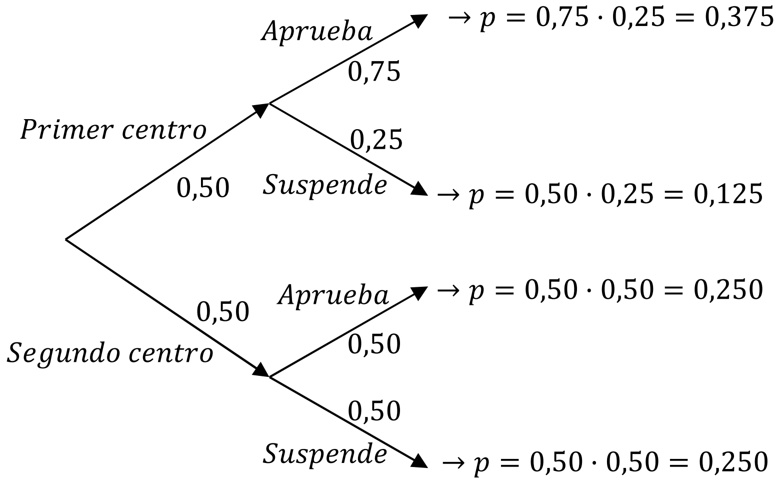
$\underline{La\ zona\ de\ escritura\ es\ máxima\ con\ 99\ cm\ de\ alto\ y\ 55\ cm\ de\ ancho.}$

****

3º) En el curso 2.013-2.014 los resultados de las pruebas a las Universidades de Castilla y León de dos centros fueron los siguientes: en el primer centro aprobaron el 75 % de los 128 alumnos presentados, mientras que en el segundo centro aprobaron el 50 % de los 88 alumnos presentados.

a) Calcula la probabilidad de que, elegido un alumno al azar, haya aprobado las pruebas de acceso.

b) Calcula la probabilidad de que un alumno suspenso proceda del segundo centro.



a)

$$P = P(A) \cdot P(1º/A) + P(A) \cdot P(2º/A) = 0{,}75 \cdot 0{,}25 + 0{,}50 \cdot 0{,}25 =$$

$$= 0{,}375 + 0{,}250 = \underline{0{,}625}.$$

b)

$$P(2º/S) = \frac{P(2º \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S) \cdot P(2º/S)}{P(S) \cdot P(1º/S) + P(S) \cdot P(2º/S)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}250}{0{,}75 \cdot 0{,}25 + 0{,}50 \cdot 0{,}25} = \frac{0{,}125}{0{,}125 + 0{,}250} =$$

$$= \frac{0{,}125}{0{,}375} = \frac{125}{375} = \frac{5}{15} = \underline{\frac{1}{3} = 0{,}333}.$$

****

4º) La nota de un estudiante en un examen de matemáticas sigue una distribución normal cuya desviación típica es $\sigma = 2{,}04$ puntos. La nota media de una muestra de 30 estudiantes es 5,5 puntos. Calcula un intervalo de confianza al 95 % para la nota media de un estudiante en un examen de matemáticas.

Nivel de confianza del 95 %.

$\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$
$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96).$

Datos: $n \geq 30;\ \ \overline{x} = 5{,}5;\ \ \sigma = 2{,}04;\ \ n = 30;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(5'5 - 1{,}96 \cdot \frac{2{,}04}{\sqrt{30}}, 5'5 + 1{,}96 \cdot \frac{2{,}04}{\sqrt{30}}\right);$

$(5'5 - 1{,}96 \cdot 0'3725, 5'5 + 1{,}96 \cdot 0'3725);\ \ (5'5 - 0'730, 5'5 + 0'730).$

$\underline{I.C._{95\,\%} = (4{,}770;\ 6{,}230).}$

****

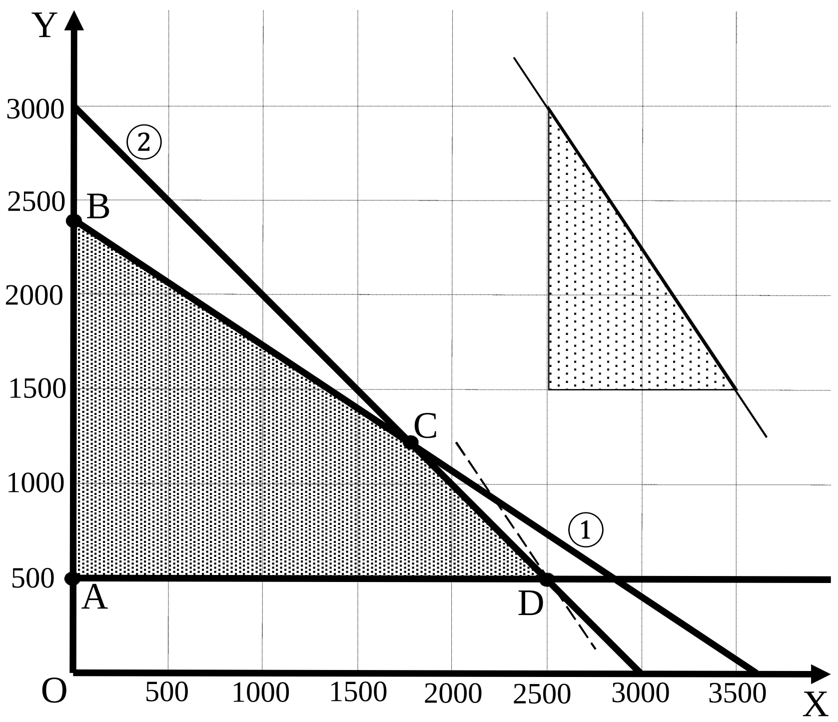
OPCIÓN B

1º) Un barco pesquero captura marisco y pescado. La clasificación automatizada de sus capturas, que ha de realizarse como mucho en 2 horas, exige un tiempo de 2 segundos por cada kg de marisco capturado y de 3 segundos por cada kg de pescado capturado. Por razones de conservación, puede capturar como mucho 3.000 kg entre marisco y pescado, pero necesita al menos capturar 500 kg de pescado para atender compromisos comerciales. El barco obtiene un beneficio de 3 euros por kg de marisco capturado y de 2 euros por kg de pescado capturado. Utiliza técnicas de programación lineal para calcular la cantidad de marisco y de pescado que el barco ha de capturar para maximizar sus beneficios. ¿A cuánto asciende ese beneficio máximo?

Sean x e y los kg de mariscos y pescado que captura el barco, respectivamente.

Una hora son 3.600 segundos.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 2x+3y\le 7.200 \\ x+y\le 3.000 \\ x\ge 0,\ y\ge 500 \end{array}\right\}$.



La función de rendimiento es la siguiente:

$F(x,y)=3x+2y.$

① $\Rightarrow 2x+3y\le 7.200 \Rightarrow y\le \frac{7.200-2x}{3} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	3.600
y	2.400	0

② $\Rightarrow x+y\le 3.000 \Rightarrow y\le 3.000-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	3.000	0
y	0	3.000

La región factible es la zona sombreada de la figura.

Los vértices de la sección factible, además de O(0, 0), son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 500 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0, 500).$ $\qquad B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 7.200 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow B(0, 2.400).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 7.200 \\ x + y = 3.000 \end{array}\right\} \begin{array}{r} 2x + 3y = 7.200 \\ -2x - 2y = -6.000 \end{array}\right\} \Rightarrow C(1.800, 1.200).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 3.000 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(3.000, 0).$$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 500) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 500 = 0 + 1.000 = 1.000.$

$B \Rightarrow f(0, 2.400) = 3 \cdot 0 + 3 \cdot 2.400 = 0 + 7.200 = 7.200.$

$C \Rightarrow f(1.800, 1.200) = 3 \cdot 1.800 + 2 \cdot 1.200 = 5.400 + 2.400 = 7.800.$

$D \Rightarrow f(3.000, 0) = 3 \cdot 3.000 + 2 \cdot 0 = 9.000 + 0 = 9.000.$

El máximo se produce en el punto D.

También se hubiera obtenido el punto D por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 3x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x \Rightarrow m = -\frac{3}{2}.$

$\underline{Ganancia\ máxima: capturando\ 500\ kg\ de\ mariscos\ y\ 2.500\ kg\ de\ pescado.}$

$\underline{La\ ganancia\ máxima\ es\ de\ 9.000\ euros.}$

****

2º) La función $f(x)$ dada por: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + 8 & si \;\; 0 < x \leq 3 \\ \frac{18}{x} + 5 & si \;\; x > 3 \end{cases}$, expresa el precio de la venta (en euros) de una botella de vino en función del tiempo x (en años) que lleva en el mercado.

a) Representa gráficamente la función $f(x)$, estudiando su continuidad y derivabilidad.

b) Estudia en qué momento el precio alcanza su valor máximo, así como ese precio máximo.

c) Determina el precio de la botella a muy largo plazo.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 3$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Para que una función sea continua en un punto es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (-x^2 + 4x + 8) = 11 = f(3) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{18}{x} + 5\right) = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 3^-} f(x) = f(3) = \lim_{x \to 3^+} f(x).$$

$$\underline{La\ función\ es\ continua\ en\ R.}$$

Para que la función sea derivable para $x = 3$, sus derivadas laterales en ese punto tienen que ser iguales:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 4 & si \;\; x \leq 3 \\ -\frac{18}{x^2} & si \;\; x > 3 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -6 + 4 = -2 \\ f'(3^+) = -\frac{18}{9} = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(3^-) = f'(3^+).$$

$$\underline{La\ función\ es\ derivable\ en\ R.}$$

En el intervalo $(-\infty, 3]$ la función es la parábola cóncava $(\cap)$ que tiene por expresión $g(x) = -x^2 + 4x + 8$, cuyo vértice es el máximo relativo siguiente:

$$g'(x) = -2x + 4 = 0 \rightarrow x = 2 \;\Rightarrow V(2, 12).$$

La parábola $g(x) = -x^2 + 4x + 8$ corta el eje de ordenadas en $A(0, 8)$ y al eje X en los siguientes puntos:

$-x^2 + 4x + 8 = 0;\ \ x^2 - 4x - 8 = 0;\ \ x = \frac{4 \pm \sqrt{16+32}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} =$

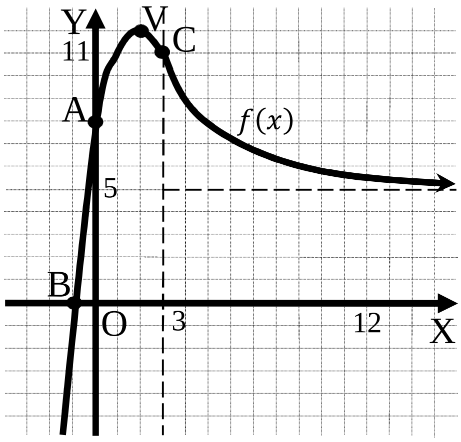
$= 2 \pm 2\sqrt{2}\ \Rightarrow B\left(2 - 2\sqrt{2}, 0\right) \sim B(0{,}83, 0).$

El punto $P\left(2 + 2\sqrt{2}, 0\right)$ no pertenece a $(-\infty, 3]$ por ser $2 + 2\sqrt{2} > 3$.

En el intervalo $(3, +\infty)$ la función es la rama hiperbólica $h(x) = \frac{18}{x} + 5$.

Por ser $\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{18}{x} + 5\right) = 5$, la rama hiperbólica tiene por asíntota horizontal a la recta $x = 5$.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que se observa en la figura adjunta.



$b)$

$\underline{La\ función\ alcanza\ el\ valor\ máximo\ para\ x = 2\ (a\ los\ dos\ años)}.$

$f(2) = -(2)^2 + 4 \cdot 2 + 8 = -4 + 8 + 8 = 12.$

$\underline{El\ valor\ máximo\ de\ la\ botella\ es\ de\ 12\ euros}.$

$c)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{18}{x} + 5\right) = 5.$

$\underline{A\ muy\ largo\ plazo\ el\ precio\ de\ la\ botella\ se\ estabiliza\ en\ 5\ euros}.$

****

3º) El volumen de madera (en m^3) que se obtiene de un chopo de diez años es una variable aleatoria con distribución normal con media $\mu = 0{,}443$ y desviación típica $\sigma = 0{,}068$.

a) Calcula la probabilidad de que un chopo de diez años se obtengan más de 0,5 m^3 de madera.

b) De una chopera con 60 chopos de diez años, ¿cuál es la probabilidad de obtener más de 26 m^3 de madera?

Datos: $\mu = 0{,}443$; $\sigma = 0{,}068$.

a)

$P(X > 0{,}5)$.

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-0{,}443}{0{,}068}$.

$$P(X > 0{,}5) = P\left(\frac{X-0{,}443}{0{,}068} > \frac{0{,}5-0{,}443}{0{,}068}\right) = P\left(Z > \frac{0{,}057}{0{,}068}\right) = P(Z > 0{,}838) =$$

$$= 1 - P(Z < 0{,}838) = 1 - 0{,}7995 = \underline{0{,}200}.$$

b)

$\mu = \frac{26}{60} = 0{,}433$; $\sigma = 0{,}068$.

$$P(X > 0{,}433) = P\left(\frac{X - 0{,}443}{0{,}068} > \frac{0{,}433 - 0{,}443}{0{,}068}\right) = P\left(Z > \frac{-0{,}01}{0{,}068}\right) =$$

$$= P(Z > -0{,}147) = 1 - P(Z \leq 0{,}147) = 1 - 0{,}5585 = \underline{0{,}4415}.$$

****

4º) La clase de los hermanos Laura y Pepe consta de 30 estudiantes. La clase participa en un sorteo de dos entradas para un evento deportivo, de manera que no se permite que un mismo estudiante consiga las dos entradas. Halla la probabilidad de que ambos hermanos consigan las dos entradas sorteadas.

$$P = \frac{2}{30} \cdot \frac{1}{29} = \frac{1}{15 \cdot 29} = \frac{1}{435} = 0{,}0023.$$

$$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ ambos\ hermanos\ tengan\ entrada\ es\ del\ 0{,}23\ \%.}$$

****