PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

JULIO – 2020

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá escoger libremente CINCO problemas completos de los DIEZ propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, solo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados. Se permite el uso de calculadoras no programables. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las propuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión de los cálculos y en las anotaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

1º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x-y+az=0 \\ x-z=0 \\ 2x+ay-2z=0 \end{cases}$.

a) Estudie la existencia y número de soluciones según los valores del parámetro a.

b) Resuélvalo, si es posible, para el valor del parámetro $a=-1$.

----

a)

La matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{pmatrix}$.

Por tratarse de un sistema lineal homogéneo, a efectos de rango, las matrices de coeficientes y ampliada son equivalentes.

El rango de la matriz de coeficientes en función de a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix}=a^2+2+a-2=a^2+a=a(a+1)=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_1=0;\ \ a_2=-1.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible determinado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e iguales al número de incógnitas; en el caso que nos ocupa el número de incógnitas es tres, por lo cual:

$$\underline{Para \left\{\begin{matrix} a \neq 0 \\ a \neq -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rang\ M = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$\underline{Para \left\{\begin{matrix} a \neq 0 \\ a \neq -1 \end{matrix}\right\} el\ sistema\ tiene\ \text{ú}nicamente\ la\ soluci\text{ó}n\ trivial\ x = y = z = 0.}$$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 2.$$

$$Para\ a = -1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 2.$$

$$\underline{Para \left\{\begin{matrix} a = 0 \\ a = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rang\ M = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $a = -1$ el sistema resulta $\left\{\begin{matrix} x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{matrix}\right.$, que es compatible indeterminado. Para su resolución se elimina una ecuación (tercera).

Haciendo $x = z = \lambda$: $y = 0$.

$$\underline{Soluci\text{ó}n: x = \lambda,\ \ y = 0,\ \ z = \lambda,\ \ \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{pmatrix}$:

a) Indique para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1}.

b) Si $a = 4, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, encuentre la matriz X que verifica la siguiente ecuación: $B + X \cdot A = C$.

----

a)

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{vmatrix} = (a-3) \cdot \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-3) \cdot (a+1-1) =$$

$$= a \cdot (a-3) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 3.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{0, 3\}}.$$

b)

Si $a = 4 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$B + X \cdot A = C;\ \ X \cdot A = C - B;\ \ X \cdot A \cdot A^{-1} = (C - B) \cdot A^{-1};$$

$$X \cdot I = (C - B) \cdot A^{-1} \Rightarrow X = (C - B) \cdot A^{-1}. \quad (*)$$

$$C - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4. \qquad A^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad Adj.\,de\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.de\ B^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión (*):

$$X = (C - B) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}.$$

****

3º) Sean el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ y $A(1, 3, -1)$. Halla la ecuación del plano β que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases}$.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 0)$.

Un vector normal de π es $\vec{n} = (1, -2, 2)$.

La expresión general del plano β pedido es la siguiente:

$$\beta(A;\ \overrightarrow{v_r}, \vec{n}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$2(x-1) - 2(z+1) - (z-1) - 2(y-3) = 0;$$

$$2(x-1) - 3(z+1) - 2(y-3) = 0;\ \ 2x - 2 - 3z - 3 - 2y + 6 = 0.$$

$$\underline{\beta \equiv 2x - 2y - 3z + 1 = 0}.$$

****

4º) Dados el punto $A(1, 2, 4)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$:

a) Halla un punto B de la recta r de forma que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea paralelo al plano de ecuación $\pi \equiv x + 2z = 0$

b) Halla un vector $\vec{w} = (a, b, c)$ perpendicular a $\vec{u} = (1, 0, -1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

----

a)

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$.

Un punto genérico de r es $B(1 + 2\lambda, 1 + \lambda, 1 + 2\lambda)$.

Un vector normal de π es $\vec{n} = (1, 0, 2)$.

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(1 + 2\lambda, 1 + \lambda, 1 + 2\lambda) - (1, 2, 4)] = (2\lambda, \lambda - 1, 2\lambda - 3)$.

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares, por lo cual, su producto escalar es 0:

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (2\lambda, \lambda - 1, 2\lambda - 3) \cdot (1, 0, 2) = 0; \;\; 2\lambda + 4\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$

El punto de r pedido es $\underline{B(3, 2, 3)}$.

b)

El vector $\vec{w} = (a, b, c)$ es linealmente dependiente (paralelo) al producto vectorial de los vectores $\vec{u} = (1, 0, -1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$:

$$\vec{w} = (a, b, c) = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2j + k + i = (1, -2, 1).$$

$$\underline{\vec{w} = (1, -2, 1)}.$$

****

5º) Representar gráficamente la función $f(x) = x \cdot e^x$, calculando previamente sus extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y sus asíntotas.

La función $f(x) = x \cdot e^x$ es continua en su dominio (que es R) por ser producto de dos funciones continuas.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(1+x) = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Teniendo en cuenta la continuidad de la función, su dominio, y que, por ejemplo, $f'(0) = e^0(1+0) = 1 > 0$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-1, +\infty).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1).}$$

Para que una función tenga un extremo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada.

$$f''(x) = e^x \cdot 1 + e^x \cdot (1+x) = e^x(2+x).$$

$$f''(-1) = e^{-1} \cdot (2-1) = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = -1.$$

$$f(-1) = -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e} \Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo: P\left(-1, -\frac{1}{e}\right)}.$$

Una función es cóncava ($\cap$) o convexa ($\cup$) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^x(2+x) = 0;\ \ e^x \neq \forall x \in R \Rightarrow 2 + x = 0 \Rightarrow x = -2.$$

$$\underline{Concavidad\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2).}$$

$$\underline{Convexidad\ (\cup): f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-2, +\infty).}$$

$$f(-2) = -2 \cdot e^{-2} = -\frac{2}{e^2} \Rightarrow Punto\ de\ inflexión: Q\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right).$$

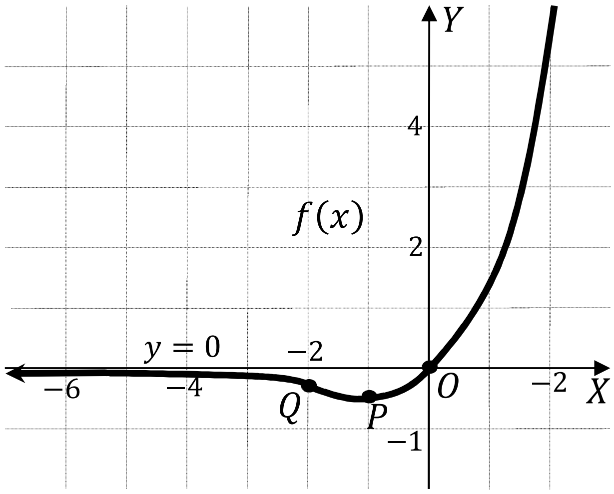
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x \cdot e^x) = \infty \cdot \infty = \infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x \cdot e^{x}) = -\infty \cdot e^{-\infty} = -\frac{\infty}{e^{\infty}} = -\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^{x}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{-e^{x}}{e^{2x}}} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^{x}}} = -e^{-\infty} = -\frac{1}{e^{\infty}} = -\frac{1}{\infty} = 0.$$

$\underline{El\ eje\ de\ abscisas\ es\ asíntota\ horizontal\ en\ su\ parte\ negativa.}$

Con los datos anteriores y teniendo en cuenta que la función contiene al origen, la representación gráfica, aproximada, de la función es la que indica la figura siguiente.



****

6º) Demuestre que la ecuación $x^3 - 12x = -2$ tiene una solución en el intervalo $[-2, 2]$ y pruebe además que esa solución es única.

Considerando la función $f(x) = x^3 - 12x + 2$ que, por ser polinómica, es continua y derivable en R, por lo cual le son aplicables los teoremas de Rolle y de Bolzano en cualquier intervalo finito que se considere.

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

Demostrar que la ecuación $x^3 - 12x = -2$ tiene una solución en el intervalo $[-2, 2]$ es equivalente a demostrar que la función $f(x) = x^3 - 12x + 2$ tiene una solución en el intervalo $[-2, 2]$.

El teorema de Bolzano dice que: "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

$f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) + 2 = -8 + 24 + 2 = 18 > 0.$

$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 2 = 8 - 24 + 2 = -14 < 0.$

Queda probado que la función $f(x) = x^3 - 12x + 2$ tiene al menos una raíz real en $[-2, 2]$.

Si la función $f(x)$ tuviera otra raíz $x = \alpha$ en el intervalo $[-2, 2]$, cumpliéndose que $f(\alpha) = 0$, se podría aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$:

$f'(x) = 3x^2 - 12 \Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 12 = 0;\;\; c^2 = 4 \Rightarrow c_1 = -2, c_2 = 2$ y estas raíces no pertenecen al intervalo considerado: $c_1 = -2, c_2 = 2 \notin [-2, 2]$.

$\underline{\mathit{Queda\ demostrado\ que}\ x^3 - 12x = -2\ \mathit{tiene\ una\ solución}\ \text{única}\ \mathit{en}\ [-2, 2].}$

****

7º) $a)$ Calcular: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - cos\,x - x}{e^x + sen\,x - 1}$. $b)$ Calcular: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen\,x + cos\,x) \cdot dx$.

$a)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - cos\,x - x}{e^x + sen\,x - 1} = \frac{e^0 - cos\,0 - 0}{e^0 + sen\,0 - 1} = \frac{1-1-0}{1+0-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x + sen\,x - 1}{e^x + cos\,x} = \frac{e^0 + sen\,0 - 1}{e^0 + cos\,0} = \frac{1+0-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

$$\underline{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - cos\,x - x}{e^x + sen\,x - 1} = 0.}$$

$b)$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen\,x + cos\,x) \cdot dx = [-cos\,x + sen\,x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[-cos\,\frac{\pi}{2} + sen\,\frac{\pi}{2}\right] - [-cos\,0 + sen\,0] = -0 + 1 + 1 - 0 = 2.$$

$$\underline{I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen\,x + cos\,x) \cdot dx = 2}$$

****

8º) $a)$ Calcule los puntos de corte de las gráficas $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = 3 - x$.

$b)$ Sabiendo que en el intervalo $[1, 2]$ se verifica que $g(x) \geq f(x)$ calcular el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones en dicho intervalo.

$a)$

Las abscisas de los puntos de corte de las gráficas de dos funciones son las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{2}{x} = 3 - x; \;\; 2 = 3x - x^2; \;\; x^2 - 3x + 2 = 0; \;\; x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} =$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2.$$

Los puntos de corte son $\underline{A(1, 2)\ y\ B(2, 1)}$.

$b)$

$$S = \int_1^2 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_1^2 \left[(3 - x) - \frac{2}{x}\right] \cdot dx = \int_1^2 \left(3 - x - \frac{2}{x}\right) \cdot dx =$$

$$= \left[3x - \frac{x^2}{2} - 2Lx\right]_1^2 = \left(3 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - 2L2\right) - \left(3 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} - 2L1\right) =$$

$$= 6 - 2 - 2L2 - 3 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{3}{2} - 2L2.$$

$$\underline{S = \frac{3 - 4L2}{2}\ u^2.}$$

****

9º) El peso de los alumnos de 2º de bachillerato de un instituto de León, sigue una distribución normal, de media 75 kg y desviación típica 5. Si se elige al azar un alumno, calcular la probabilidad de que:

a) Tenga un peso entre 70 y 80 kg. b) Tenga un peso superior a 85 kg.

----

a)

$Datos$: $\mu = 75;\ \ \sigma = 5.$

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(75;\ 5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-75}{5}$.

$P = P(70 \leq X \leq 80) = P\left(\frac{70-75}{5} \leq Z \leq \frac{80-75}{5}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) =$

$= P(Z < 1) - [1 - P(Z < 1)] = 2 \cdot P(Z < 1) - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 =$

$= 1{,}6826 - 1 = \underline{0{,}6826}.$

b)

$P(X > 85) = P\left(Z > \frac{85-75}{5}\right) = P\left(Z > \frac{10}{5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) =$

$= 1 - 0{,}9772 = \underline{0{,}0228}.$

****

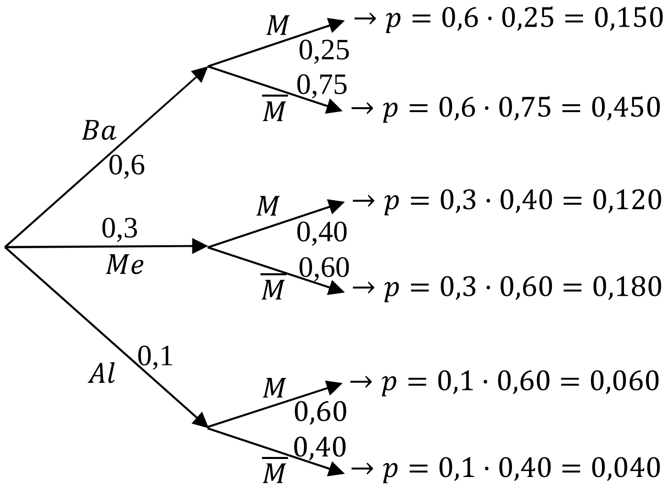
10º) La probabilidad de que a un puerto llegue un barco de tonelaje bajo, medio o alto es 0,6, 0,3 y 0,1, respectivamente. La probabilidad de que necesite mantenimiento en el puerto es de 0,25 para los barcos de bajo tonelaje, 0,4 para los de tonelaje medio y 0,6 para los de tonelaje alto.

a) Si llega un barco a puerto, calcule la probabilidad de que necesite mantenimiento.

b) Si un barco ha necesitado mantenimiento, calcule la probabilidad de que sea de tonelaje medio.

----

a)



$$P = P(M) = P(Ba \cap M) + P(Me \cap M) + P(Al \cap M) =$$

$$= P(Ba) \cdot P(M/Ba) + P(Ba) \cdot P(M/Ba) + P(Al) \cdot P(M/Al) =$$

$$= 0{,}6 \cdot 0{,}25 + 0{,}3 \cdot 0{,}40 + 0{,}1 \cdot 0{,}60 = 0{,}150 + 0{,}120 + 0{,}060 = \underline{0{,}330}.$$

b)

$$P = P(Me/M) = \frac{P(Me \cap M)}{P(M)} = \frac{P(Me) \cdot P(M/Me)}{P(M)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}40}{0{,}33} = \frac{0{,}120}{0{,}33} = \underline{0{,}3636}.$$

****