PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE – 2020

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá escoger libremente CINCO problemas completos de los DIEZ propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, solo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados. Se permite el uso de calculadoras no programables. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las propuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión de los cálculos y en las anotaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

1º) $a)$ Discutir el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$, según los valores del parámetro λ.

$b)$ Resolverlo para $\lambda = 1$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 - \lambda - 1 = 0;\ \ \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} \lambda \neq 0 \\ \lambda \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ \lambda = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ \lambda = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ \lambda = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ \lambda = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $\lambda = 1$ el sistema resulta $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$.

Haciendo $y = \lambda;\ \ x = 1 - \lambda;\ \ z = 1.$

$$\underline{Solución: x = 1 - \lambda;\ \ y = \lambda;\ \ z = 1,\ \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ m & n\end{pmatrix}$:

a) Encontrar los valores de m y n para que se verifique: $A^2=A^t$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

b) ¿Para qué valores de m y n la matriz A es invertible?

----

a)

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ m & n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ m & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ m+mn & n^2\end{pmatrix}.$$

$$A^2=A^t\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ m+mn & n^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & n\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{m=0;\ \ n=\pm1}.$$

b)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ m & n\end{vmatrix}=n.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ no\ es\ invertible\ para\ n=0\ y\ m\in R}.$$

****

3º) Dado el punto $P(2, 1, 1)$ la recta $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$:

$a)$ Hallar la recta s paralela a r y que pase por P.

$b)$ Hallar la ecuación del plano π que pasa por el punto P y contiene a la recta r.

$a)$

La recta s, por ser paralela a r, tiene por vector director a cualquiera que sea linealmente dependiente del vector director de r: $\overrightarrow{v_s} = (1, -1, -3)$.

$$\underline{s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}}.$$

$b)$

Un punto de r es $Q(2, 3, 4)$.

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(2, 3, 4) - (2, 1, 1)] = (0, 2, 3)$.

$$\pi(P;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{PQ}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$-3(x-2) + 2(z-1) + 6(x-2) - 3(y-1) = 0;$

$3(x-2) - 3(y-1) + 2(z-1) = 0;\ \ 3x - 6 - 3y + 3 + 2z - 2 = 0.$

$$\underline{\pi \equiv 3x - 3y + 2z - 5 = 0}.$$

****

4º) a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,2,3)$ y es paralela a la recta $r \equiv \begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$.

b) Calcular el punto A', simétrico de $A(1,2,3)$ respecto del plano π de ecuación general $\pi \equiv 3x+2y+z+4=0$.

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-y=1+\lambda \\ x+y=3-\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x=4;\;\; x=2.$$

$$2+y=3-\lambda;\;\; y=1-\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $P(2,1,0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(0,-1,1)$.

La recta pedida s contiene al punto $A(1,2,3)$ y, por ser paralela a r, tiene por vector director a cualquiera que sea linealmente dependiente del vector director de la recta r: $\overrightarrow{v_s}=(0,-1,1)$.

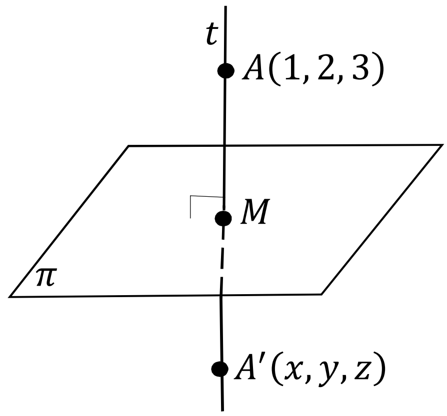
$$\underline{s \equiv \frac{x-2}{0}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}}.$$

b)

La recta t que pasa por A y es perpendicular a π tiene como vector director al vector normal del plano $\pi \equiv 3x+2y+z+4=0$: $\vec{n}=(3,2,1) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}$.

El punto M, intersección del plano π con la recta t es el siguiente:

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv 3x+2y+z+4=0 \\ t \equiv \begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow 3(1+3\lambda)+2(2+2\lambda)+(3+\lambda)+4=0;$$

$$3+9\lambda+4+4\lambda+3+\lambda+4=0;\;\; 14+14\lambda=0;$$

$$1+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow M(-2,0,2).$$

Tiene que cumplirse que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MA'}$.

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=[(-2,0,2)-(1,2,3)]=(-3,-2,-1).$$

$$\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OM} = [(x, y, z) - (-2, 0, 2)] = (x + 2, y, z - 2).$$

$$(-3, -2, -1) = (x + 2, y, z - 2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2 = -3 \rightarrow x = -5 \\ y = -2 \\ z - 2 = -1 \rightarrow z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underline{A'(-5, -2, 1)}.$$

****

5º) Determinar la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, conociendo que tiene un punto de inflexión en $x = 1$ y que la recta tangente a su gráfica en el punto $P(-1, 0)$ es el eje de abscisas.

Por contener al punto $P(-1, 0) \Rightarrow f(-1) = 0$:

$f(-1) = (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0;\ -1 + a - b + c = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a - b + c = 1.$ (1)

Por tener un punto de inflexión para $x = 1 \Rightarrow f''(1) = 0$:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b.$ $f''(x) = 6x + 2a.$

$f''(1) = 6 \cdot 1 + 2a = 0;\ \ 3 + a = 0 \Rightarrow \underline{a = -3}.$

Sustituyendo este valor en (1):

$-3 - b + c = 1;\ \ b - c = -4.$ (2)

La pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

El eje de abscisas es la recta de pendiente cero: $y = 0 \Rightarrow m = 0.$

Para $a = -3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + b.$

$f'(-1) = m = 0 \Rightarrow 3 \cdot (-1)^2 + 6 + b = 0;\ \ 3 + 6 + b = 0 \Rightarrow \underline{b = -9}.$

Sustituyendo en (2): $-9 - c = -4 \Rightarrow \underline{c = -5}.$

$$\underline{f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5}.$$

****

6º) Demuestre que la ecuación $x^4 + 3x = 1 + sen\, x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0, 2]$. Probar que la solución es única.

Demostrar lo pedido es equivalente a demostrar que la función $f(x) = x^4 + 3x - 1 - sen\, x$ tiene una solución única.

La función $f(x)$, que es continua y derivable en su dominio, que es R, por serlo las funciones $g(x) = x^4 + 3x - 1$ y $h(x) = -sen\, x$ y si dos funciones son continuas y derivables en R también lo es su función suma algebraica.

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

A la función $f(x)$ le es aplicable el teorema de Bolzano en cualquier intervalo cerrado que se considere, por ejemplo, $[0, 2]$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0^4 + 3 \cdot 0 - 1 - sen\, 0 < 0 \\ f(2) = 2^4 + 3 \cdot 2 - 1 - sen\, 2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in [0, 2] \Rightarrow f(c) = 0.$$

Ya se ha probado que la función tiene una raíz $x = c \in [0, 2]$; ahora se debe demostrar que este valor es único.

Teniendo en cuenta la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ y que:

$f'(x) = 4x^3 + 3 - cos\, x\ > 0, \forall x \in [0, 2]$, lo cual significa que la función es monótona creciente lo que implica que solamente tenga una solución.

$\underline{Queda\ demostrado\ lo\ pedido}.$

****

7º) a) Calcular: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x}$.

b) Dada la función $f(x) = \frac{2x-e^{-x}}{x^2+e^{-x}}$, hallar la función primitiva suya $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$.

----

a)

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x} = \frac{\sqrt{1^2-1+1}-\sqrt{2 \cdot 1-1}}{1-1} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{1}}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1}\right)}{(1-x)\left(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1}\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2-\left(\sqrt{2x-1}\right)^2}{(1-x)\left(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2-x+1-(2x-1)}{(1-x)\left(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1}\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-x+1-2x+1}{(1-x)\left(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2-3x+2 \quad (*)}{(1-x)\left(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1}\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{-(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1}\right)} = -\lim_{x \to 1} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1}} =$$

$$= -\frac{1-2}{\sqrt{1^2-1+1}+\sqrt{2 \cdot 1-1}} = -\frac{-1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

$(*)$ $x^2-3x+2=0;$ $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$.

$$\underline{\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x} = \frac{1}{2}}.$$

También puede hacerse de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x} = \frac{\sqrt{1^2-1+1}-\sqrt{2 \cdot 1-1}}{1-1} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{1}}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}-\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}}{-1} = \frac{\frac{2 \cdot 1-1}{2\sqrt{1^2-1+1}}-\frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1-1}}}{-1} = -\left(\frac{1}{2\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{1}}\right) = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}.$$

b)

$$F(x) = \int \frac{2x-e^{-x}}{x^2+e^{-x}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2+e^{-x} = t \\ \left(2x-e^{-x}\right) \cdot dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t} \cdot dt = Lt + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = L\left(2x - e^{-x}\right) + C.$$

$$F(0) = 3 \Rightarrow L\left(2 \cdot 0 - e^{-0}\right) + C = 3; \;\; L(2-1) + C = 3; \;\; L1 + C = 3;$$

$0 + 3 = C \Rightarrow C = 3.$

$$\underline{F(x) = L(2x - e^{-x}) + 3}.$$

****

8º) a) Dada la función $f(x)=\frac{Lx}{x}$. Encontrar sus extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Dada la función $f(x)=x^2-2x$. Estudiar el signo de la función en el intervalo $[1,3]$ y encontrar el área del recinto comprendido entre su gráfica, el eje OX y las rectas $x=1\ y\ x=3$.

----

a)

El dominio de la función es $D(f) \Rightarrow (0,+\infty)$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-Lx\cdot 1}{1}=1-Lx.$$

Los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x)>0 \Rightarrow x\in(e,+\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x)<0 \Rightarrow x\in(0,e)}.$$

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo cuando se anula su primera derivada:

$$f'(x)=0 \Rightarrow 1-Lx=0 \Rightarrow Lx=1 \Rightarrow x=e.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(x)=-\frac{1}{x}. \qquad f''(e)=-\frac{1}{e}<0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para } x=e.$$

$$f(e)=\frac{Le}{e}=\frac{1}{e} \Rightarrow \underline{Máx.relativo \Rightarrow P\left(e,\frac{1}{e}\right)}.$$

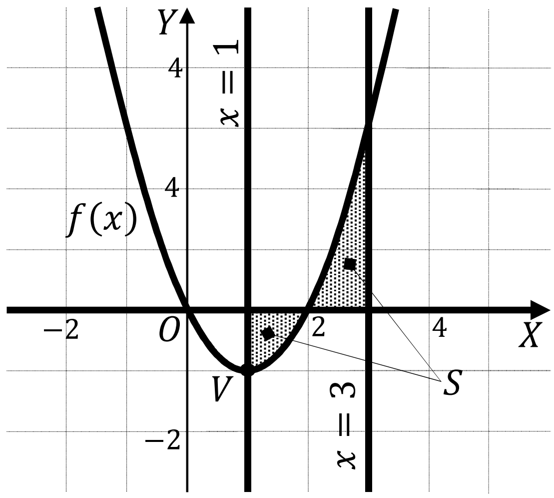
b)

La función $f(x)=x^2-2x$ es una parábola convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de x^2; su vértice es el siguiente:

$$f'(x)=2x-2. \qquad f'(x)=0 \Rightarrow 2x-2=0;\ \ x-1=0 \Rightarrow x=1.$$

$$f(1)=1^2-2\cdot 1=1-2=-1 \Rightarrow V(1,-1).$$

De la observación de la gráfica adjunta se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:



$$S = \int_2^1 f(x) \cdot dx + \int_2^3 f(x) \cdot dx =$$

$$= [F(x)]_2^1 + [F(x)]_2^3 =$$

$$= F(1) - F(2) + F(3) - F(2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = F(1) + F(3) - 2F(2). \quad (*)$$

$$F(x) = \int f(x)\, dx = \int (x^2 - 2x\ )\, dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + C = \frac{x^3}{3} - x^2 + C.$$

Sustituyendo esta expresión en (*):

$$S = \left(\frac{1^3}{3} - 1^2\right) + \left(\frac{3^3}{3} - 3^2\right) - 2 \cdot \left(\frac{2^3}{3} - 2^2\right) = \frac{1}{3} - 1 + 9 - 9 - 2 \cdot \left(\frac{8}{3} - 4\right) =$$

$$= \frac{1}{3} - 1 - \frac{16}{3} + 8 = 7 - \frac{15}{3} = 7 - 5 = 2.$$

$$\underline{S_1 = 2\ u^2}.$$

****

9º) El consumo de azúcar en un determinado país, calculado en kg por persona y año, varía según una distribución normal de media 15 kg y desviación típica 5.

a) ¿Qué porcentaje de personas de ese país consumen menos de 10 kg de azúcar al año?

b) ¿Cuál es el porcentaje de personas del país cuyo consumo anual de azúcar es superior a 25 kg?

----

a)

$Datos$: $\mu = 15;\ \ \sigma = 5.$

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(15;\ 5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-15}{5}$.

$$P = P(X < 10) = P\left(Z < \frac{10-15}{5}\right) = P\left(Z < \frac{-5}{5}\right) = P(Z < -1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0{,}8413 = \underline{0{,}1587}.$$

b)

$$P = P(X > 25) = P\left(Z > \frac{25-15}{5}\right) = P\left(Z > \frac{10}{2}\right) = P(Z > 2) =$$

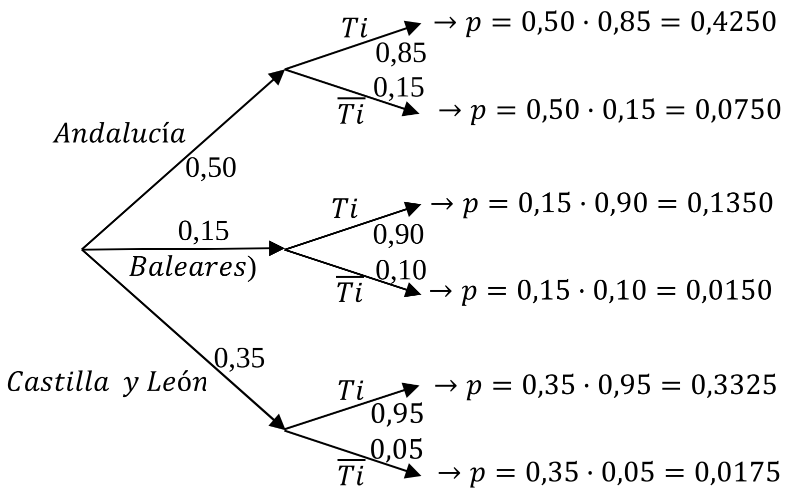
$$= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = \underline{0{,}0228}.$$

****

10º) Los estudiantes, que comienzan los estudios en Medicina, en el conjunto formado por las comunidades de Andalucía, Baleares y Castilla y León, se distribuyen de la siguiente forma: un 50 % de Andalucía, un 15 % de Baleares y un 35 % provienen de Castilla y León. Los porcentajes de dichos estudiantes que no consiguen el título de Médico son los siguientes: 15 % de Andalucía, 10 % de Baleares y 5 % de Castilla y León.

a) Calcular la probabilidad de que uno de dichos estudiantes, elegido al azar, no consiga el título de Licenciado en Medicina.

b) Si un alumno no consigue el título de Licenciado en Medicina, ¿es más probable que provenga de Andalucía o de Castilla y León?



a)

$$P = P(\overline{Ti}) = P(A \cap \overline{Ti}) + P(B \cap \overline{Ti}) + P(CL \cap \overline{Ti}) =$$

$$= P(A) \cdot P(\overline{Ti}/A) + P(B) \cdot P(\overline{Ti}/B) + P(CL) \cdot P(\overline{Ti}/CL) =$$

$$= 0{,}50 \cdot 0{,}15 + 0{,}15 \cdot 0{,}10 + 0{,}35 \cdot 0{,}05 = 0{,}0750 + 0{,}0150 + 0{,}0175 =$$

$$= \underline{0{,}1075}.$$

b)

$$P_1 = P(A/\overline{Ti}) = \frac{P(A \cap \overline{Ti})}{P(\overline{Ti})} = \frac{P(A) \cdot P(\overline{Ti}/A)}{P(\overline{Ti})} = \frac{0{,}50 \cdot 0{,}15}{0{,}1075} = \frac{0{,}0750}{0{,}1075} = 0{,}6977.$$

$$P_2 = P(CL/\overline{Ti}) = \frac{P(CL \cap \overline{Ti})}{P(\overline{Ti})} = \frac{P(CL) \cdot P(\overline{Ti}/CL)}{P(\overline{Ti})} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}05}{0{,}1075} = \frac{0{,}0175}{0{,}1075} = 0{,}1628.$$

$$\underline{Es\ mucho\ más\ probable\ que\ proceda\ de\ Andalucía.}$$

****