PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.
2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Estudiar si A y B tienen inversa y calcularlas cuando sea posible.

b) Determinar X tal que $AX = 2B + I$ siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

----

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \;\Rightarrow\; \underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible}.$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}. \qquad Adj.\,de\ A^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{A^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{La\ matriz\ B\ no\ es\ invertible}.$$

$b)$

$AX = 2B + I = M;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot M;\ \ I \cdot X = A^{-1} \cdot M \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot M}.$

$M = 2B + I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$

$X = A^{-1} \cdot M = -\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.}$$

****

2º) Determinar la recta r que es paralela al plano $\pi \equiv x - y - z = 0$ y que corta perpendicularmente a la recta $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-4}$ en el punto $P(2, -1, -2)$.

Un vector director de la recta s es $\overrightarrow{v_s} = (1, 2, -4)$.

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, -1, -1)$.

La recta r, por ser perpendicular al plano π, tiene como vector a cualquiera que sea linealmente dependiente del vector normal del plano y por ser perpendicular a s sus vectores directores también lo son; es decir: $\overrightarrow{v_r}$ tiene que ser perpendicular simultáneamente a $\overrightarrow{v_s}$ y a $\vec{n}$, o lo que es lo mismo: linealmente dependiente del producto vectorial de estos vectores.

$$\overrightarrow{v'_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2i - 4j - k - 2k - 4i + j = -6i - 3j - 3j \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (2, 1, 1)$.

La expresión de r dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{r = \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda. \\ z = -2 + \lambda \end{cases}}$$

****

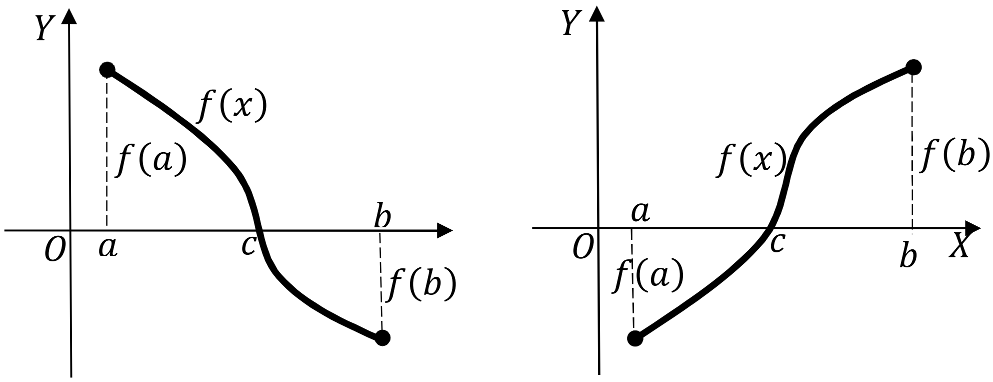
3º) $a)$ Enunciar el teorema de Bolzano e interpretarlo geométricamente.

$b)$ Encontrar un intervalo en el que $P(x) = x^6 + x^4 - 1$ tenga al menos una raíz.

$a)$

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

La interpretación gráfica del Teorema de Bolzano es la indicada en las figuras.



$b)$

La función $P(x)$ es continua en su dominio, que es R, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano en cualquier intervalo cerrado que se considere, por ejemplo, $[0, 1]$:

$$\left.\begin{array}{l} P(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0 \\ P(1) = 1^6 + 1^4 - 1 = 1 + 1 - 1 = 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in [0, 1] \Rightarrow P(c) = 0.$$

$\underline{La\ función\ P(x) = x^6 + x^4 - 1\ tiene\ al\ menos\ una\ raiz\ real\ en\ [0, 1].}$

****

4º) a) Calcular la recta tangente a la curva $f(x) = 4e^{x-1}$ en el punto $P[1, f(1)]$.

b) Calcular el área de la región limitada en el primer cuadrante por la gráfica de la función $g(x) = x^3$ y la recta $y = 4x$.

----

a)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = f(x) = 4e^{x-1} \Rightarrow m = f'(1) = 4 \cdot e^{1-1} = 4 \cdot e^0 = 4 \cdot 1 = 4.$$

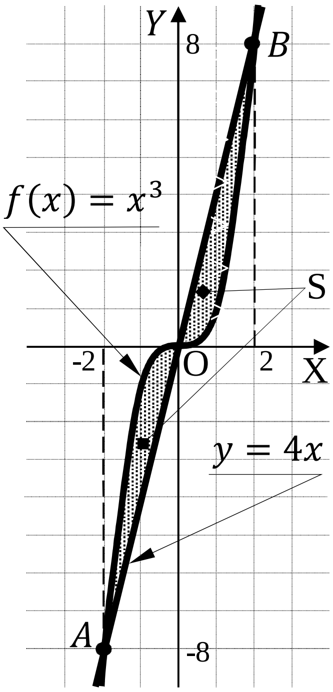
$$f(1) = 4 \cdot e^{1-1} = 4 \cdot e^0 = 4 \cdot 1 = 4 \Rightarrow P(1, 4).$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 4 = 4 \cdot (x - 1) = 4x - 4.$$

$$\underline{Recta\ tantenge: t \equiv 4x - y = 0}.$$

b)

Las abscisas de los puntos de corte de la curva y la recta son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:



$$x^3 = 4x; \;\; x^3 - 4x = 0; \;\; x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2.$$

Los puntos de corte de la función y la recta son los siguientes: $A(-2, -8), O(0, 0)\ y\ B(2, 8)$.

Nótese que, tanto la función como la recta son simétricas con respecto al origen. Por otra parte, en el intervalo $(0, 2)$ las ordenadas de la recta son mayores que las correspondientes ordenadas de la función.

Teniendo en cuenta lo anterior, la superficie S a calcular es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^2 (4x - x^3) \cdot dx = \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \left(2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4}\right) - 0 =$$

$$= 8 - 4 = 4.$$

$$\underline{S = 4\ u^2}.$$

****

5º) Se lanzan dos dados (con forma cúbica) al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea 8?

El espacio muestral es: $E = \begin{Bmatrix} 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16 \\ 21, & 22, & 23, & 24, & 25, & 26 \\ 31, & 32, & 33, & 34, & 35, & 36 \\ 41, & 42, & 43, & 44, & 45, & 46 \\ 51, & 52, & 53, & 54, & 55, & 56 \\ 61, & 62, & 63, & 64, & 65, & 66 \end{Bmatrix}$.

Los casos favorables aparecen sombreados en la siguiente expresión del espacio vectorial:

$$E = \begin{Bmatrix} 11, 12, 13, 14, 15, 16 \\ 21, 22, 23, 24, 25, \mathbf{26} \\ 31, 32, 33, 34, \mathbf{35}, 36 \\ 41, 42, 43, \mathbf{44}, 45, 46 \\ 51, 52, \mathbf{53}, 54, 55, 56 \\ 61, \mathbf{62}, 63, 64, 65, 66 \end{Bmatrix}$$

Aplicando la regla de Laplace:

$P = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles} = \underline{\frac{5}{36} = 0{,}139}$.

****

OPCIÓN B

1º) $a)$ Discutir, según el valor del parámetro λ, el sistema $\begin{cases} x+\lambda y+\lambda z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+2y+4z=2 \end{cases}$.

$b)$ Resolverlo para $\lambda=1$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada en función de λ son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=4+2\lambda+\lambda-\lambda-2-4\lambda=0;\ -2\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=1.$$

$$\underline{Para\ \lambda\neq 1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ \lambda=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_2\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ \lambda=1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $\lambda=1$ el sistema es $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+2y+4z=2 \end{array}\right\}$, equivalente a $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+2y+4z=2 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado. Haciendo $z=\mu$:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=1-\mu \\ x+2y=2-4\mu \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -x-y=-1+\mu \\ x+2y=2-4\mu \end{array}\right\} \Rightarrow y=1-3\mu.$$

$$x+y=1-\mu \Rightarrow x+1-3\mu=1-\mu;\ \ x=2\mu.$$

$$\underline{Solución: x=2\mu, y=1-3\mu, z=\mu, \forall\mu\in R.}$$

****

2º) Dado el plano $\pi \equiv 3x + y + z - 2 = 0$ y los puntos $P(0, 1, 1)$ y $Q(2, -1, -3)$ que pertenecen al plano π, determinar la recta r del plano π que pasa por el punto medio de P y Q y es perpendicular a la recta que contiene a estos puntos.

El punto medio de los puntos $P(0, 1, 1)$ y $Q(2, -1, -3)$ es el siguiente:

$x = \frac{0+2}{2} = 1;\ y = \frac{1-1}{2} = 0;\ \ z = \frac{1-3}{2} = -1 \Rightarrow M(1, 0, -1)$.

Los puntos $P(0, 1, 1)$ y $Q(2, -1, -3)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(2, -1, -3) - (0, 1, 1)] = (2, -2, -4)$.

El vector normal del plano π es $\vec{n} = (3, 1, 1)$.

El vector director de la recta r es, al mismo tiempo, perpendicular a los vectores $\vec{n}\ y\ \overrightarrow{PQ}$. Un vector perpendicular a dos vectores dados es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los dos vectores.

$\vec{n} \wedge \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -4i + 2j - 6k - 2k + 2i + 12j = -2i + 14j - 8k = (-2, 14, -8)$.

Un vector director de la recta r es, por ejemplo, $\overrightarrow{v_r} = (1, -7, 4)$.

La recta r, que contiene a $M(1, 0, -1)$, dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -7\lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}}.$$

****

3º) $a)$ Dado el polinomio $P(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + C$, hallar C para que el valor de $P(x)$ en su mínimo relativo sea 1.

$b)$ Calcular $\lim_{x \to 0^+} (x \cdot Lx)$.

$a)$

El polinomio $P(x)$ puede considerarse a efectos de máximos y mínimos relativos como la función $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + C$.

Para que una función polinómica tenga un mínimo relativo son condiciones necesarias que se anule su primera derivada y sea positiva su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$f'(x) = x^2 - 3x + 2.$ $\quad$ $f''(x) = 2x - 3.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0;\ \ x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2.$

$f''(1) = 2 \cdot 1 - 3 = 2 - 3 = -1 < 0 \Rightarrow$ Máximo relativo para $x = 1$.

$f''(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1 > 0 \Rightarrow$ Mínimo relativo para $x = 2$.

$P(2) = 1 \Rightarrow \frac{2^3}{3} - \frac{3 \cdot 2^2}{2} + 2 \cdot 2 + C = 1;\ \ \frac{8}{3} - 6 + 4 + C = 1;\ \ \frac{8}{3} - 2 + C = 1;$

$8 - 6 + 3C = 3;\ \ 2 + 3C = 3;\ \ 3C = 1 \Rightarrow \underline{C = \frac{1}{3}}.$

$b)$

$\lim_{x \to 0^+} (x \cdot Lx) = 0 \cdot L0 = 0 \cdot (-\infty) \Rightarrow Indet. \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{Lx}{\frac{1}{x}} = \frac{L0}{\frac{1}{0}} = \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$

$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0^+} x = -0.$

$$\underline{\lim_{x \to 0^+} (x \cdot Lx) = 0^-.}$$

****

4º) Sea $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & si \;\; x \le 1 \\ a + Lx & si \;\; x > 1 \end{cases}$.

a) Encontrar a para que la función sea continua.

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x = 1$ e $y = 1$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

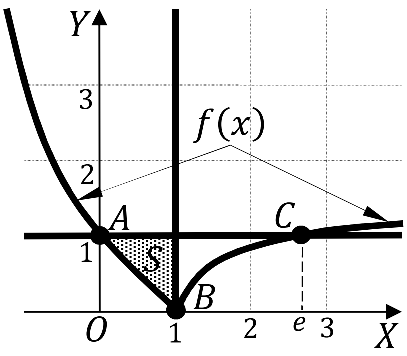
$$Para\; x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x-1)^2 = 0 = f(1) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to} (a + Lx) = a + L1 = a + 0 = a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \underline{a = 0}.$$

b)

La función resulta: $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & si \;\; x \le 1 \\ 1 + Lx & si \;\; x > 1 \end{cases}$.

Para la representación gráfica de la función se tiene en cuenta que en el intervalo $(-\infty, 1]$ la función es la parábola $y = (x-1)^2$, que es una parábola convexa $(\cup)$ que corta al eje de ordenadas en el punto $A(0, 1)$ y cuyo vértice es el punto $B(1, 0)$. En el intervalo $(1, +\infty)$ la función es una rama parabólica de origen el punto B y contiene al punto $C(e, 1) \approx C(2'73, 1)$.



La representación gráfica, aproximada, es la que indica la figura adjunta.

La superficie pedida se deduce de la observación de la figura, teniendo en cuenta que sus puntos tienen todos ordenadas positivas; es la siguiente:

$$S = \int_0^1 [1 - (x-1)^2] dx = \int_0^1 [1 - (x^2 - 2x + 1)] dx = \int_0^1 (-x^2 + 2x) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right]_0^1 = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 = \left(-\frac{1^3}{3} + 1^2 \right) - 0 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{-1+3}{3} = \underline{\frac{2}{3}\, u^2 = S}.$$

****

5º) La probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 3 caras en tres lanzamientos?

$$P = P(CCC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{8}}.$$

****