PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE – 2010 (ESPECÍFICO)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Indicaciones:

1.-Optatividad: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.-Calculadora: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que pueden reconstruirse la argumentación lógica de los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x)=\frac{(x+3)^2}{e^x}$, se pide determinar:

a) El dominio, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos.

c) La gráfica de f.

----

a)

La función está definida para cualquier valor real de x: $\underline{\underline{D(f)\Rightarrow R}}$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$\underline{Eje\ \ X}\ \Rightarrow\ f(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{(x+3)^2}{e^x}=0\ \ ;;\ \ (x+3)^2=0\ \ ;;\ \ x=-3\ \Rightarrow\ \underline{\underline{A(-3,\ 0)}}.$$

$\underline{Eje\ \ Y} \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{(0+3)^2}{e^0}=\frac{9}{1}=9 \Rightarrow \underline{\underline{B(0,\ 9)}}.$

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales y oblicuas.

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más o menos infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)^2}{e^x}=\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2(x+3)}{e^x}=$$

$$=\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=\underline{0}.$$

$$y=k=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+3)^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-\infty+3)^2}{e^{-\infty}}=\underline{+\infty}$$

<u>El semieje positivo OX es asíntota horizontal de f(x).</u>

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$e^x=0 \Rightarrow \underline{x \notin R} \Rightarrow$

<u>La función f(x) no tiene asíntotas verticales.</u>

Oblicuas: Las asíntotas horizontales y oblicuas son excluyentes.

<u>La función f(x) no tiene asíntotas verticales.</u>

b)

Una función es creciente o decreciente en su dominio cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{2(x+3)\cdot e^x-(x+3)^2\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{2(x+3)-(x+3)^2}{e^x}=\frac{(x+3)\cdot[2-(x+3)]}{e^x}=$$

$$=\frac{(x+3)\cdot(2-x-3)}{e^x}=-\frac{(x+3)\cdot(x+1)}{e^x}=-\frac{x^2+4x+3}{e^x}=0 \Rightarrow \underline{x_1=-3}\ ;;\ \underline{x_2=-1}.$$

Las raíces encontradas dividen el dominio de f(x), que es R, en tres intervalos que son, alternativamente, crecientes y decrecientes, por lo cual, basta con estudiar uno de ellos, por ejemplo $(-1,\ \infty)$, (al que pertenece el valor trivial x = 0):

$$f'(0)=-\frac{3\cdot 1}{e^0}=-3<0\ .$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son:

$$\underline{\underline{Crecimiento:\ x\in(-3,\ -1)}}\ \ ;;\ \ \underline{\underline{Decrecimiento:\ x\in(-\infty,\ -3)\cup(-1,\ +\infty)}}$$

Una función tiene un extremo relativo cuando se anula la primera derivada; para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera, se trata de un máximo relativo y si es positiva, de un mínimo relativo.

$$f''(x)=-\frac{(2x+4)\cdot e^x-(x^2+4x+3)\cdot e^x}{e^{2x}}=-\frac{(2x+4)-(x^2+4x+3)}{e^x}=$$

$$=-\frac{2x+4-x^2-4x-3}{e^x}=\underline{\frac{x^2+2x-1}{e^x}=f''(x)}.$$

$$f''(-3)=\frac{(-3)^2+2\cdot(-3)-1}{e^{-3}}=\frac{9-6-1}{e^{-3}}=2e^3>0\ \Rightarrow\ \underline{\text{Mínimo relativo para x = -3}}.$$

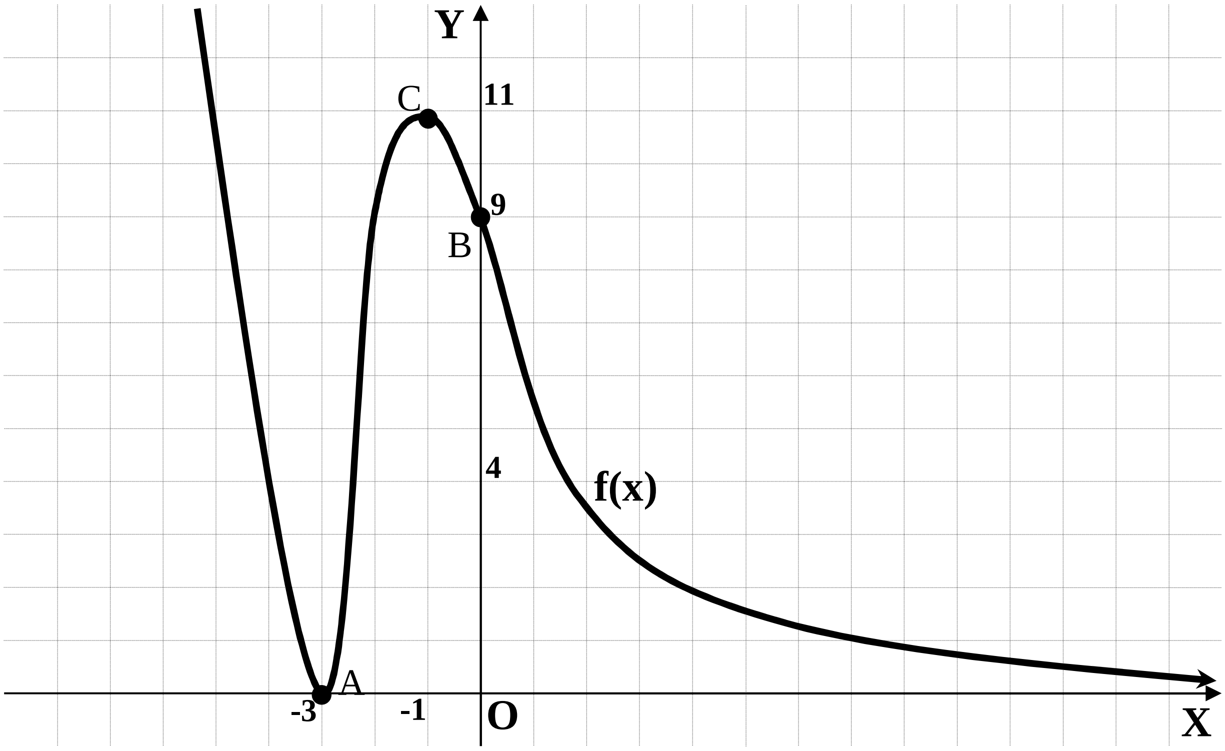
$$f(-3)=\frac{(-3+3)^2}{e^{-3}}=\frac{0}{e^{-3}}=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Mínimo:\ A(-3,\ 0)}}.$$

$$f''(-1)=\frac{(-1)^2+2\cdot(-1)-1}{e^{-1}}=\frac{1-2-1}{e^{-1}}=-2e^3<0\ \Rightarrow\ \underline{\text{Máximo relativo para x = -1}}.$$

$$f(-1)=\frac{(-1+3)^2}{e^{-1}}=\frac{4}{e^{-1}}=4e\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Máximo:\ C(-1,\ 4e)}}.$$

c)

Con los datos obtenidos puede dibujarse, aproximadamente. la gráfica de f. que es la siguiente.


Y
C
11
9
B
4
f(x)
A
-3
-1
O
X

****

2º) Calcular: $I = \int_1^e \frac{1 + L\,x^3 + (L\,x)^2}{x(1 + L\,x)} \cdot dx$.

$$I = \int_1^e \frac{1 + L\,x^3 + (L\,x)^2}{x(1 + L\,x)} \cdot dx = \int_1^e \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{(L\,x)^2 + 3L\,x + 1}{L\,x + 1} \right] \cdot dx \Rightarrow$$ Haciendo la división:

$$\begin{array}{rrr|l} (L\,x)^2 & +3L\,x & +1 & L\,x+1 \\ \cline{4-4} -(L\,x)^2 & -L\,x & & L\,x+2 \\ \hline 0 & +2L\,x & +1 & \\ & -2L\,x & -2 & \\ \cline{2-3} & 0 & -1 & \end{array}$$

$$I = \int_1^e \left[\frac{1}{x} \cdot \left(L\,x + 2 - \frac{1}{L\,x+1} \right) \right] \cdot dx = \int_1^e \frac{L\,x}{x} \cdot dx + 2 \cdot \int_1^e \frac{dx}{x} - \int_1^e \frac{1}{x(L\,x+1)} \cdot dx = \underline{I_1 + 2I_2 - I_3 = I}. \quad (*)$$

$$I_1 = \int_1^e \frac{L\,x}{x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c|c} L\,x = t & x = e \rightarrow t = 1 \\ \frac{1}{x} \cdot dx = dt & x = 1 \rightarrow t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow I_1 = \int_0^1 t \cdot dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \underline{\frac{1}{2} = I_1}.$$

$$I_2 = \int_1^e \frac{dx}{x} = [L\,x]_1^e = L\,e - L\,1 = 1 - 0 = \underline{1 = I_2}.$$

$$I_3 = \int_1^e \frac{1}{x(L\,x+1)} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c|c} L\,x + 1 = t & x = e \rightarrow t = 2 \\ \frac{1}{x} \cdot dx = dt & x = 1 \rightarrow t = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow I_3 = \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot dt = [L\,t]_1^2 = L\,2 - L\,1 = \underline{L\,2 = I_3}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de I:

$$I = I_1 + 2I_2 - I_3 = \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 - L\,2 = \frac{5}{2} - L\,2 = \underline{\underline{\frac{5 - L\,4}{2} = I}}.$$

****

3º) Hallar la ecuación general del plano α que pasa por el punto A(1, 0, -1), es perpendicular al plano $\pi \equiv x - y + 2z + 1 = 0$ y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$.

El vector normal del plano $\pi \equiv x - y + 2z + 1 = 0$ es $\overrightarrow{n} = (1,\ -1,\ 2)$.

Un vector director de la recta r puede ser cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector que se obtiene al multiplicar vectorialmente los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (0,\ 0,\ 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ -2,\ 0)$.

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = j + 2i = 2i + j = \underline{(2,\ 1,\ 0) = \overrightarrow{u}}.$$

La ecuación del plano α la determinan el punto A(1, 0, -1) y los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{n}$.

$$\alpha(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{n}) = \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 2(x-1) - 2(z+1) - (z+1) - 4y = 2(x-1) - 3(z+1) - 4y =$$

$$= 2x - 2 - 3z - 3 - 4y = 0.$$

$$\underline{\underline{\alpha \equiv 2x - 4y - 3z - 5 = 0}}$$

****

4º) a) Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 - 3A = -2I$ (I es la matriz identidad). Probar que A admite inversa y utilizar la igualdad dada para expresar A^{-1} en función de A.

b) Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 0 & 1 \\ m & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes de un sistema lineal. Hallar razonadamente los valores de m para los que el sistema es compatible determinado.

----

a)

$A^2 - 3A = -2I$;; $|A \cdot (A - 3I)| = -2$. Teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es el producto de los módulos de las matrices:

$|A| \cdot |A - 3I| = -2$. Sabiendo que el determinante de una suma de matrices es la suma de los determinantes de las matrices:

$$|A| \cdot |A| \cdot (-3) = -2 \;\;;;\;\; |A|^2 = \frac{2}{3} \;\;;;\;\; |A| = \sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{A es inversible, c. q. p.}}$$

$A^2 - 3A = -2I$;; $A \cdot (A - 3I) = -2I \Rightarrow$ Multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot (A - 3I) = -2\,A^{-1} \;\;;;\;\; I \cdot (A - 3I) = -2\,A^{-1} \;\;;;\;\; \underline{\underline{A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot (A - 3I)}}.$$

b)

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es compatible determinado cuando el rango de la matriz de coeficientes es tres (igual que la matriz ampliada).

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 0 & 1 \\ m & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2m + 2m - 1 - 8 = 4m - 9 = 0 \Rightarrow \underline{m = \frac{9}{4}} \Rightarrow m \neq \frac{9}{4} \Rightarrow Rango \;\; B = 3.$$

$$\underline{\underline{El \;\; sistema \;\; es \;\; compatible \;\; \det er\min ado \;\; \forall m \in R, \;\; m \neq \frac{9}{4}}}$$

****

OPCIÓN B

1º) De $f: R \to R$ se sabe que $f''(x) = x^2 + 2x + 2$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto P(1, 2). Hallar la expresión de f.

$$f'(x) = \int \left(x^2 + 2x + 2\right) \cdot dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 2x + C = \underline{\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + C = f'(x)}.$$

Por tener tangente horizontal para x = 1 tiene que cumplirse que $f'(1) = 0$:

$$f'(1) = 0 \Rightarrow \frac{1^3}{3} + 1^2 + 2 \cdot 1 + C = 0 \;;\; \frac{1}{3} + 3 + C = 0 \;;\; \underline{C = -\frac{10}{3}}.$$

La función derivada es $\underline{f'(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x - \frac{10}{3}}$.

La función f(x) es la integral indefinida de la función derivada:

$$f(x) = \int \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x - \frac{10}{3}\right) \cdot dx = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - \frac{10}{3}x + D = \underline{\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{10}{3}x + D}.$$

Teniendo en cuenta que f(x) contiene a P(1, 2) tiene que ser $f(1) = 2$:

$$f(1) = 2 \Rightarrow \frac{1^4}{12} + \frac{1^3}{3} + 1^2 - \frac{10}{3} \cdot 1 + D = 2 \;;\; \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + 1 - \frac{10}{3} + D = 2 \;;\; m.\ c.\ m. = 12 \Rightarrow$$

$$1 + 4 + 12 - 40 + 12D = 24 \;;\; 12D = 24 - 17 + 40 = 47 \;;\; \underline{D = \frac{47}{12}}.$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{47}{12} = \frac{1}{12}\left(x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 40x + 47\right)}}.$$

****

2º) a) Sean $f(x)=\frac{x-|x|}{2}$ y $g(x)=\begin{cases} 3x & si \quad x\le 0 \\ x^2 & si \quad x>0 \end{cases}$. Hallar $g[f(x)]$.

b) Calcular $I=\int (x+3)\cdot e^{x+2}\cdot dx$.

----

a)

La función $f(x)=\frac{x-|x|}{2}$ puede redefinirse de la siguiente forma:

$$f(x)=\frac{x-|x|}{2}=\frac{1}{2}(x-|x|) \;\Rightarrow\; \underline{f(x)=\begin{cases} x & si \quad x\le 0 \\ 0 & si \quad x>0 \end{cases}}.$$

$$\underline{\underline{g[f(x)]=\begin{cases} 3x & si \quad x\le 0 \\ 0 & si \quad x>0 \end{cases}}}$$

b)

$$I=\int (x+3)\cdot e^{x+2}\cdot dx \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{c} x+3=u \rightarrow du=dx \\ e^{x+2}\cdot dx=dv \rightarrow v=e^{x+2} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; I=(x+3)\cdot e^{x+2}-\int e^{x+2}\cdot dx=$$

$$=(x+3)\cdot e^{x+2}-e^{x+2}+C=e^{x+2}(x+3-1)+C\,.$$

$$\underline{\underline{I=e^{x+2}(x+2)+C}}$$

****

3º) a) Determinar las coordenadas del punto A' simétrico de A(-2, 1, 6) respecto de la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$.

b) Hallar la distancia de A a r.

----

a)

Un vector de r es $\overrightarrow{v} = (1,\ 2,\ 2)$.

El plano π, perpendicular a r por A, es el que tiene como vector normal $\overrightarrow{v}$ y contiene al punto A:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+2y+2z+D=0 \\ \\ A(-2,\ 1,\ 6) \end{array}\right\} \Rightarrow -2+2\cdot 1+2\cdot 6+D=0 \ \ ;;\ \ \underline{D=-12} \ \Rightarrow\ \underline{\pi \equiv x+2y+2z-12=0}.$$

El punto N de intersección de la recta r con el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2} \\ \pi \equiv x+2y+2z-12=0 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \\ \pi \equiv x+2y+2z-12=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (-1+\lambda)+2(3+2\lambda)+2(-1+2\lambda)-12=0 \ \ ;;\ \ -1+\lambda+6+4\lambda-2+4\lambda-12=0 \ \ ;;\ \ 9\lambda=9 \ \ ;;$$

$$\underline{\lambda=1} \ \Rightarrow\ \ \underline{N(0,\ 5,\ 1)}.$$

Para que A' sea el punto simétrico de A con respecto a r, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NA'} \ \Rightarrow\ N-A=A'-N \ \ ;;\ \ (0,\ 5,\ 1)-(-2,\ 1,\ 6)=(x,\ y,\ z)-(0,\ 5,\ 1) \ ;;$$

$$(2,\ 4,\ -5)=(x-0,\ \ y-5,\ \ z-1) \ \Rightarrow \left.\begin{cases} x-0=2 \ \rightarrow\ \underline{x=2} \\ y-5=4 \ \rightarrow\ \underline{y=9} \\ z-1=-5 \ \rightarrow\ \underline{z=-4} \end{cases}\right\} \ \Rightarrow\ \ \underline{\underline{A'(2,\ 9,\ -4)}}.$$

b)

La distancia de A a r es la misma que la distancia entre los puntos A(-2, 1, 6) y N(0, 5, 1):

$$d(A,\ r)=\overline{AN}=\sqrt{(0+2)^2+(5-1)^2+(1-6)^2}=\sqrt{4+16+25}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}.$$

$$\underline{\underline{d(A,\ r)=3\sqrt{5}\ \ unidades}}$$

****

4º) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcular A^{-1}.

b) Resolver la ecuación matricial $A \cdot X + 2A \cdot B = B$.

----

a)

Para obtener la matriz inversa de A vamos a utilizar el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to \frac{1}{3}F_1 \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 - \tfrac{2}{3}F_3\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}}.$$

b)

$$A \cdot X + 2A \cdot B = B \;;;\; A \cdot X = B - 2A \cdot B = (I-2A) \cdot B.$$

Multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (I-2A) \cdot B \;;;\; I \cdot X = A^{-1} \cdot (I-2A) \cdot B \;;;\; \underline{X = A^{-1} \cdot (I-2A) \cdot B}.$$

$$I-2A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3}+\frac{4}{3} \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3}-\frac{2}{3} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\underline{X = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

****