PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE - 2007

(Resueltos por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora "de una línea". No se admitirá el uso de memoria para texto, ni de las prestaciones gráficas.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma en el orden deseado.

PRUEBA A

PROBLEMAS

1º) Se considera el sistema $\begin{cases} x + y + az = 4 \\ ax + y - z = 0 \\ 2x + 2y - z = 2 \end{cases}$, donde a es un parámetro real.

a) Discutir el sistema en función del valor del parámetro a.

b) Resolver el sistema para a = 1.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \; y \; M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ a & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

El rango de M en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2a^2 - 2 - 2a + 2 + a = 2a^2 - a - 1 = 0 \;\; ;;$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \underline{a_1 = 1} \;\; ;; \;\; \underline{a_2 = -\frac{1}{2}}$$

$$\underline{\underline{Para \; \left\{ \begin{array}{l} a \neq 0 \\ a \neq -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow Rango \; M = Rango \; M' = 3 = n^o \; incógnitas \Rightarrow Compatible \; \det er \min ado}}$$

$$\underline{Para \;\; a = 1} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_2\} \Rightarrow Rango \;\; M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 4 + 8 - 2 = 0 \Rightarrow \underline{Ramgo \;\; M' = 2}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a = 1 \Rightarrow Rango \; M = Rango \; M' = 2 < n^o \; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; In \det er \min ado}}$$

$$\underline{Para \;\; a = -\frac{1}{2}} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 4 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango \;\; M' \Rightarrow \{C_1, \; C_2, \; C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 - 8 + 1 = -7 \neq 0 \Rightarrow \underline{Ramgo \;\; M' = 3}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a = -\frac{1}{2} \Rightarrow Rango \; M \neq Rango \; M' \Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Resolvemos para a = 1. El sistema resulta: $\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - z = 2 \end{array} \right.$.

Despreciando una de las ecuaciones (la tercera) y parametrizando una de las incógnitas (y), se tiene:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \underline{y=\lambda} \;\; ;; \;\; \underline{z=2} \;\; ;; \;\; x+y-z=0 \;\; ;; \;\; x+\lambda-2=0 \;\; ;; \;\; \underline{x=2-\lambda}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=\lambda \\ z=2 \end{cases} \quad , \quad \forall \lambda \in R}}$$

****

2º) Sea f la función dada por $f(x)=e^{2x-x^2}$. Se pide:

a) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y las asíntotas de f.

b) Determinar el número de soluciones de la ecuación f(x) = 2 en el intervalo [0, 1].

----

a)

Se trata de una función exponencial cuyo dominio es R y su recorrido es $(0,\ \infty)$, por lo tanto tiene como asíntota horizontal la recta y = 0, como más adelante se justificará.

$$f'(x)=(2-2x)\cdot e^{2x-x^2}\ \Rightarrow\ f'(x)=0\ \Rightarrow\ (2-2x)\cdot e^{2x-x^2}=0\ ;;\ 2-2x=0\ ;;\ \underline{x=1}$$

$$Para\ \ x>1\ \Rightarrow\ f'(x)<0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Decrecimiento\ \Rightarrow\ (1,\ \infty)}}$$

$$Para\ \ x<1\ \Rightarrow\ f'(x)>0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Crecimiento\ \Rightarrow\ (-\infty,\ 1)}}$$

De lo anterior se deduce que para x = 1 la función tiene un máximo, en esta caso absoluto, que justificamos a continuación a través de la segunda derivada.

$$f''(x)=-2\cdot e^{2x-x^2}+(2-2x)\cdot(2-2x)e^{2x-x^2}=-2\cdot e^{2x-x^2}+4(1-x)^2\cdot e^{2x-x^2}=$$

$$=2e^{2x-x^2}\left[-1+2(1-x)^2\right]=2e^{2x-x^2}\left(-1+2-4x+2x^2\right)=\underline{\left(2x^2-4x+1\right)e^{2x-x^2}=f''(x)}$$

$$f''(1)=(2-4+1)e^1=-e<0\ \Rightarrow\ \underline{Máximo\ \ para\ \ x=1}$$

$$f(1)=e^{2-1}=e\ \Rightarrow\ Máximo\ \Rightarrow\ \underline{\underline{P(1,\ e)}}.$$

Por las características de la función, carece de asíntotas verticales y oblicuas.

Para determinar la posible asíntota oblicua recurrimos a los límites con tendencia a $+\infty$ y a $-\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2\left(\frac{2}{x}-1\right)}=e^{-\infty}=\underline{0}\\ \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2\left(\frac{2}{x}-1\right)}=e^{-\infty}=\underline{0}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \underline{\underline{Asíntota\ \ horizontal:\ y=0}}$$

b)

La ecuación $f(x)=e^{2x-x^2}=2$ es equivalente a $2x-x^2=L2$;; $x^2-2x+L2=0$.

El número de soluciones depende del signo del discriminante de la ecuación anterior:

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4L2}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{1-L2}}{2}=1\pm\sqrt{1-L2}\ .$$

Teniendo en cuenta que $L2\cong 0'69$, las soluciones son:

$$x_1=1+\sqrt{1-0'69}=1+\sqrt{31}>1\ \Rightarrow\ \underline{x_1\notin[0,\ 1]}$$

$$x_2=1-\sqrt{1-0'69}=1-\sqrt{31}\ ;;\ 0<x_2<1\ \Rightarrow\ \underline{x_1\in[0,\ 1]}$$

<u>La ecuación f(x) = 2 tiene una solución el intervalo [0, 1].</u>

****

CUESTIONES

1ª) Sea X una matriz 2 x 2, I la matriz identidad 2 x 2 y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar X sabiendo que $BX + B = B^2 + I$.

$BX + B = B^2 + I$;; $B \cdot (X + I) = B^2 + I \Rightarrow$ (Multiplicando por la izquierda por B^{-1}) $\Rightarrow$

$B^{-1} \cdot B \cdot (X + I) = B^{-1} \cdot (B^2 + I)$;; $I \cdot (X + I) = B^{-1} \cdot B \cdot B + B^{-1} \cdot I$;;

$X + I = I \cdot B + B^{-1}$;; $X + I = B + B^{-1}$;; $\underline{X = B + B^{-1} - I}$ (*)

La matriz inversa de $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la siguiente:

$$(B / I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ F_1 \to \frac{1}{2} F_1 \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ F_1 \to F_1 - \frac{1}{2} F_2 \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Sustituyendo los valores de B y B^{-1} en la expresión (*):

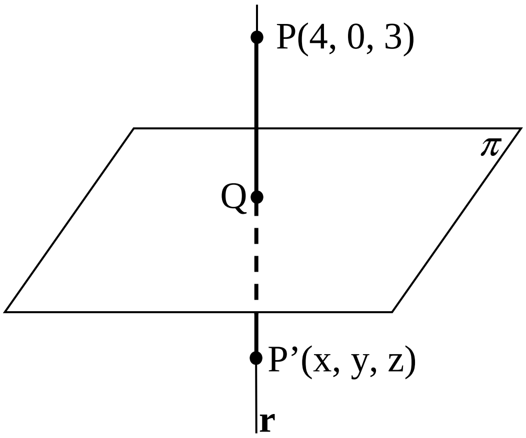
$$X = B + B^{-1} - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\underline{X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

****

2ª) Determinar el punto simétrico de P(4, 0, 3) respecto del plano de ecuación $\pi \equiv x = y$.

La expresión general del plano es $\pi \equiv x - y = 0$ y un vector normal al plano π es $\overrightarrow{n} = (1,\ -1,\ 0)$.



La recta r es la que pasa por el punto P y es perpendicular al plano tiene como vector director al vector normal del plano, y sus ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 3 \end{cases}.$$

Un punto genérico de la recta r es $Q'(4+\lambda,\ -\lambda,\ 3)$.

El punto Q, intersección del plano π con la recta r, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - y = 0 \\ Q(4+\lambda,\ -\lambda,\ 3) \end{array}\right\} \Rightarrow (4+\lambda) - (-\lambda) = 0\ ;;\ 4 + \lambda + \lambda = 0\ ;;\ 2\lambda = -4\ ;;\ \underline{\lambda = -2} \Rightarrow \underline{Q(2,\ 2,\ 3)}$$

Para que P' sea el punto simétrico de P con respecto a π, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \Rightarrow Q - P = P' - Q\ ;;\ (2,\ 2,\ 3) - (4,\ 0,\ 3) = (x,\ y,\ z) - (2,\ 2,\ 3)\ ;;$$

$$(-2,\ 2,\ 0) = (x-2,\ y-2,\ z-3) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 2 = -2 \ \rightarrow\ \underline{x = 0} \\ y - 2 = 2 \ \rightarrow\ \underline{y = 4} \\ z - 3 = 0 \ \rightarrow\ \underline{z = 3} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{P'(0,\ 4,\ 3)}}$$

****

3ª) Determinar en qué puntos de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$, la recta tangente a la misma es paralela a la recta y = x + 7.

La recta $y = x + 7$ tiene de pendiente 1.

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual al valor de la derivada de la función en ese punto, por lo cual, la derivada de $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$ tiene que ser 1:

$$y' = 3x^2 - 6x + 1 = 1 \;;;\; 3x^2 - 6x = 0 \;;;\; 3x(x-2) = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 0} \;;;\; \underline{x_2 = 2}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow P(0,\ 1)$$

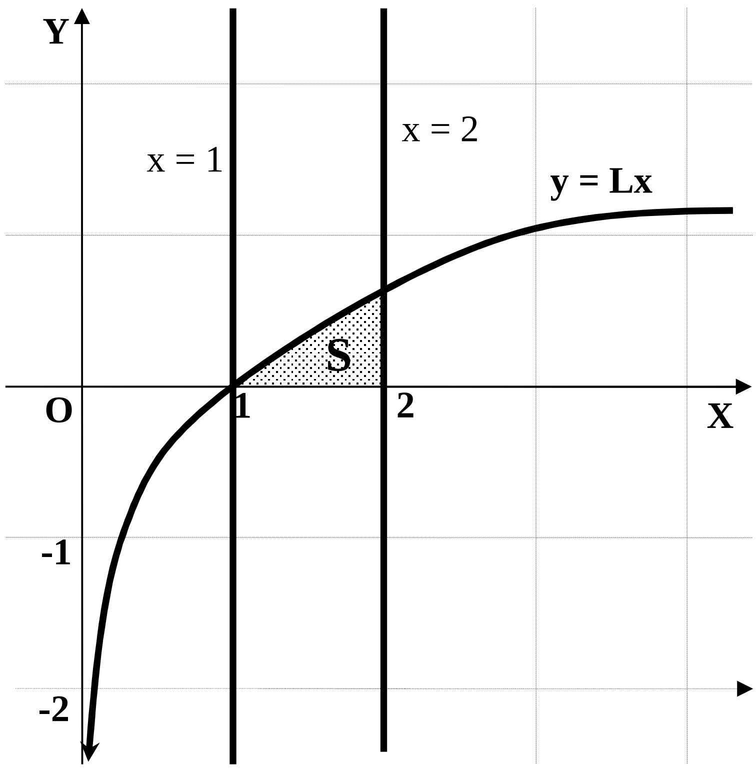
$$y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 + 1 = 8 - 12 + 3 = -1 \Rightarrow Q(2,\ -1)$$

<u>Los puntos pedidos son P(0, 1) y Q(2, -1).</u>

****

4ª) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = L\ x$, el eje OX y las rectas x = 1 y x = 2.

La situación gráfica se ilustra en la siguiente figura:



Teniendo en cuenta que toda la superficie pedida está en la parta positiva, su valor es el siguiente: $S = \int_1^2 L\,x \cdot dx$.

El valor de la integral indefinida $I = \int L\,x \cdot dx$ tiene que determinarse por el método de "por partes", tal como se indica a continuación:

$$I = \int L\,x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} L\,x = u \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dx = dv \rightarrow v = x \end{array} \right\} \Rightarrow I = L\,x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \cdot L\,x - \int dx =$$

$$= x \cdot L\,x - x + C = \underline{\underline{x(L\,x - 1) + C = I}}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, la superficie pedida es:

$$S = \int_1^2 L\,x \cdot dx = \left[x\left(L\,x - 1\right)\right]_1^2 = \left[2\left(L\,2 - 1\right)\right] - \left[1\left(L1 - 1\right)\right] = 2\left(L\,2 - 1\right) - \left(0 - 1\right) = 2\,L\,2 - 2 + 1 =$$

$$= \underline{\underline{\left(L\,4 - 1\right)\,u^2 = S}}$$

****

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) De la recta r se sabe que está contenida en el plano $\pi \equiv x - y = 0$, que O(0, 0, 0) pertenece a r, y que el vector que une O y B(1, 0, -1) es perpendicular a r. Determinar la recta r, y calcular la distancia entre r y el plano π' paralelo a π que pasa por B.

El vector normal del plano $\pi \equiv x - y = 0$ es $\overrightarrow{n} = (1,\ -1,\ 0)$ y teniendo en cuenta que si una recta es perpendicular a un plano es perpendicular a todas las rectas contenidas en el plano, el vector $\overrightarrow{n} = (1,\ -1,\ 0)$ es perpendicular a r.

Sabemos que el vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB} = (1,\ 0,\ -1)$ es perpendicular a r por condición del problema, por lo tanto, la recta r es perpendicular al mismo tiempo a los vectores $\overrightarrow{n}$ y $\overrightarrow{v}$, lo cual significa que el vector director de la recta es el producto vectorial $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = i + k + j = i + j + k = \underline{(1,\ 1,\ 1) = \overrightarrow{v_r}}$$

Teniendo en cuenta que r contiene a O(0, 0, 0), su ecuación dada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas es la siguiente: $\underline{\underline{r \equiv \{x = y = z}}$.

El plano π', por ser paralelo a π, tiene una ecuación general de la forma siguiente: $\pi' \equiv x - y + D = 0$. Para determinar el valor de D tenemos en cuenta que el punto B pertenece al plano π':

$$\left. \begin{array}{l} \pi' \equiv x - y + D = 0 \\ B(1,\ 0,\ -1) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 0 + D = 0 \ ;;\ D = -1 \Rightarrow \underline{\pi' \equiv x - y - 1 = 0}.$$

Naturalmente que la recta r y el plano π' son paralelos, por lo cual su distancia es la misma que la de cualquier punto de r al plano π', por ejemplo el punto O(0, 0, 0).

Sabiendo que la distancia del origen de coordenadas al plano genérico $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ es $d(O,\ \pi) = \dfrac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$:

$$d(r,\ \pi') = d(O,\ \pi') = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\ unidades = d(r,\ \pi')}}$$

****

2º) Sea la función $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. Se pide hallar:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, los máximos y mínimos relativos y las asíntotas. Esbozar su gráfica.

b) El área de la región limitada por la gráfica de f, el eje OX y las rectas x = -2 y x = 2.

----

a)

Se trata de una función racional cuyo dominio es R, por no existir valores reales de x que anulan el denominador.

Es simétrica con respecto al origen por ser $f(-x)=-f(x)$.

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento recurrimos a su derivada:

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\underline{\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=f'(x)}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 1-x^2=0\ ;;\ (1+x)(1-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=1} \\ \underline{x_2=-1} \end{cases}$$

$$Para\ |x|>1 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow \underline{\underline{Decrecimiento:\ (-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)}}$$

$$Para\ |x|<1 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow \underline{\underline{Crecimiento:\ (-1,\ 1)}}$$

Los máximos y mínimos relativos de la función son los siguientes:

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot(x^2+1)^2-(1-x^2)\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{-2x\cdot(x^2+1)-4x\cdot(1-x^2)}{(x^2+1)^3}=$$

$$=\frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{(x^2+1)^3}=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}=\underline{\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}=f''(x)}$$

$$f''(1)=\frac{2\cdot(1-3)}{(1+1)^3}=\frac{-4}{8}<0 \Rightarrow \underline{Máximo} \Rightarrow f(1)=\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P\left(1,\ \frac{1}{2}\right)}}$$

$$f''(-1)=\frac{-2\cdot(1-3)}{(1+1)^3}=\frac{4}{8}>0 \Rightarrow \underline{Mínimo} \Rightarrow f(-1)=-\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{Q\left(-1,\ -\frac{1}{2}\right)}}$$

Los puntos de inflexión son los siguientes:

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=0 \Rightarrow 2x\left(x^2-3\right)=0 \;\Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=0} \\ \underline{x_2=\sqrt{3}} \\ \underline{x_3=-\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$f'''(x)=\frac{\left(6x^2-6\right)\left(x^2+1\right)^3-\left(2x^3-6x\right)\cdot 3\left(x^2+1\right)^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^6}=\frac{\left(6x^2-6\right)\left(x^2+1\right)-6x\left(2x^3-6x\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=$$

$$=\frac{6x^4+6x^2-6x^2-6-12x^4+36x^2}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{-6x^4+36x^2-6}{\left(x^2+1\right)^4}=\underline{\frac{-6\left(x^4-6x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=f'''(x)}$$

$$f'''(0)=\frac{-6}{2}\neq 0 \Rightarrow P.\ \ Inflexión\ \ ;;\ \ f(0)=0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{O(0,\ 0)}}$$

$$f'''\left(\sqrt{3}\right)=\frac{-6(9-18+1)}{16}\neq 0 \Rightarrow P.\ \ Inflexión\ \ ;;\ \ f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{M\left(\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}}$$

$$f'''\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{-6(9-18+1)}{16}\neq 0 \Rightarrow P.\ \ Inflexión\ \ ;;\ \ f\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{N\left(-\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}}$$

Las asíntotas son las siguientes:

<u>Horizontales:</u>

Son los valores finitos de f(x) cuando x tiende a $\pm\infty$:

$$y=k \Rightarrow y=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\underline{\underline{0=y}} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\underline{\underline{0^+}} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\underline{\underline{0^-}} \end{cases}$$

La solución de este apartado es lógica si tenemos en cuenta que la función es simétrica con respecto al origen de coordenadas.

<u>Verticales:</u>

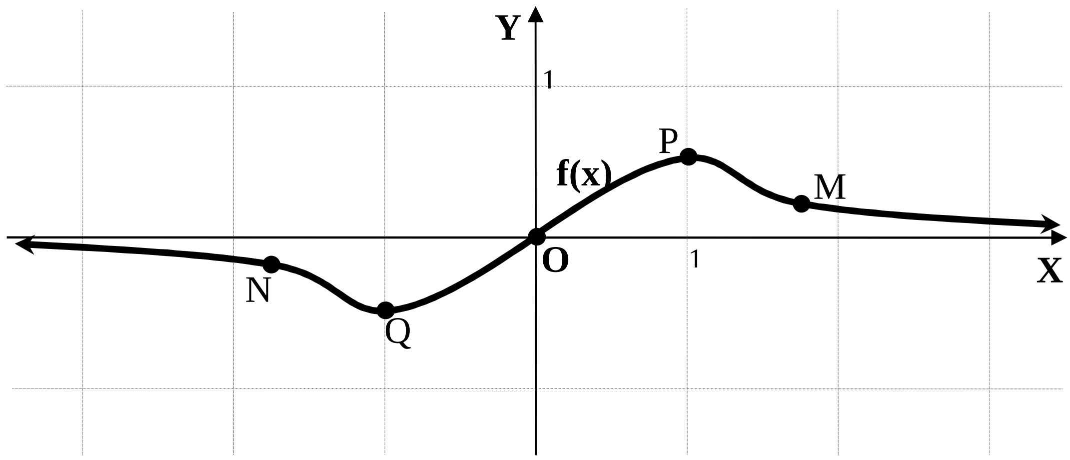
Son los valores finitos que anulan el denominador: <u>no tiene</u>.

<u>Oblicuas:</u>

Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador.

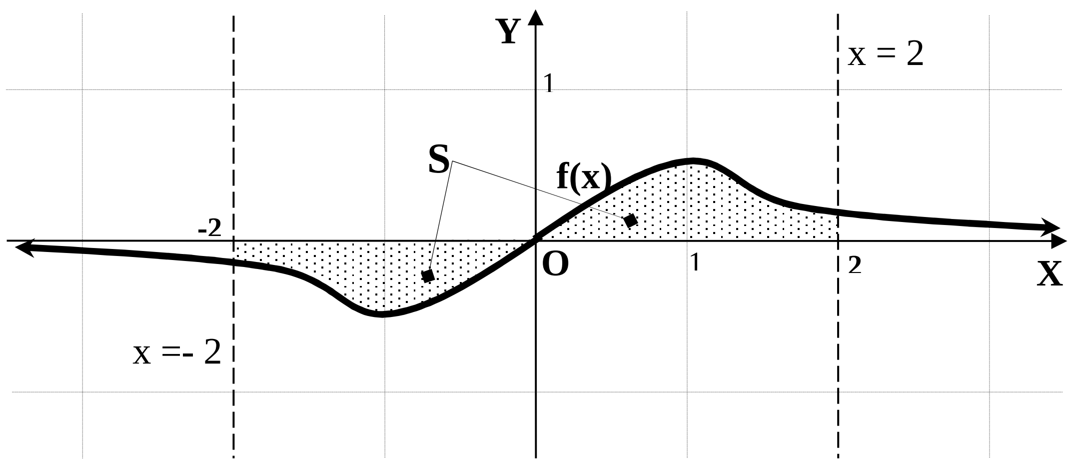
En el caso que nos ocupa: no tiene.

La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la siguiente:



b)

Teniendo en cuenta la simetría de la función y de la observación de la gráfica siguiente, se deduce que el área pedida es:



$$S = 2 \cdot \int_0^2 f(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 \frac{x}{x^2+1} \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l|l} x^2+1=t & x=2 \rightarrow t=5 \\ x\,dx = \frac{1}{2}dt & x=0 \rightarrow t=1 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow$$

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_1^5 \frac{dt}{t} = [L\,t]_1^5 = L\,5 - L\,1 = \underline{\underline{L\,5 \cong 1'61\ u^2 = S}}$$

****

CUESTIONES

1ª) Discutir, en función del número real m, el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Independientemente del valor de m, el Rango de A es igual o mayor que 2 por ser el menor complementario del elemento $a_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$, cuyo rango es 2.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=8-m(1+m)-6+4m+6-2(1+m)=8-m-m^2+4m-2-2m=$$

$=-m^2+m+6=0$;; $m^2-m-6=0$.

$$m=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm5}{2} \Rightarrow \underline{m_1=3} \;;;\; \underline{m_2=-2}$$

$$Para\ \left\{\begin{matrix} m\neq 3 \\ m\neq -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rango\ A=3. \quad Para\ \left\{\begin{matrix} m=3 \\ m=-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rango\ A=2$$

****

2ª) Sea A el punto medio del segmento de extremos P(3, 2, 1) y Q(-1, 0, 1). Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B(2, 1, 3), C(1, 2, 3) y D(3, 4, 1).

El punto medio buscado es el que tiene la media de las respectivas coordenadas, o sea: A(1, 1, 1).

Los vectores que determinan el tetraedro son:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ 1,\ 3) - (1,\ 1,\ 1) = \underline{(1,\ 0,\ 2)}.$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1,\ 2,\ 3) - (1,\ 1,\ 1) = \underline{(0,\ 1,\ 2)}.$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (3,\ 4,\ 1) - (1,\ 1,\ 1) = \underline{(2,\ 3,\ 0)}.$$

Sabiendo que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan (en valor absoluto), será:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right] \right| = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot \left| -4-6 \right| = \frac{10}{6} = \underline{\underline{\frac{5}{3}\ u^3 = V_{ABCD}}}$$

****

3ª) Discutir si la ecuación $x + sen\ x = 2$ tiene alguna solución real.

Considerando la función $f(x) = x + sen\ x - 2$ y teniendo en cuenta el Teorema de Bolzano que dice lo siguiente:

"Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$".

La función f(x) es continua en su dominio, que es R, por tanto le es aplicable el mencionado teorema en cualquier intervalo finito que se considere.

Considerando, por ejemplo, el intervalo $(0,\ \pi)$ se observa que para el valor x = 0 es $f(0) < 0$ y para $x = \pi$ es $f(\pi) > 0$:

$$f(0) = 0 + sen\ 0 - 2 = 0 + 0 - 2 = -2 < 0 \ \ ;; \ \ f(\pi) = \pi + sen\ \pi - 2 = \pi - 1 - 2 = \pi - 3 > 0$$

Lo anterior demuestra que la función dada tiene al menos una solución real.

****

4ª) Calcular, si existe, el valor de $\lim_{x \to 0} \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)^2}{x^2}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}\right)^2 = A^2.$$

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \frac{e^0 - e^{-0}}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow In\det. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} =$$

$$= \frac{1+1}{1} = 2.$$

$$\underline{\underline{\lim_{x \to 0} \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)^2}{x^2} = A^2 = 2^2 = 4}}$$

****