PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO - 2006

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora “en línea”. No se admitirá el uso de memoria para texto, ni las prestaciones gráficas.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma en el orden deseado.

PRUEBA A

PROBLEMAS

1º) Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - y = m \\ z + 2y = 3 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2z = 3 \end{cases}$.

a) Hállese el valor de m para que ambas rectas se corten.

b) Para m = 1, hállese la ecuación del plano π que contiene a r y s.

----

a)

El sistema que forman las rectas es $\begin{cases} 2x - y = m \\ 2y + z = 3 \\ x + y = 2 \\ x + 2z = 3 \end{cases}$.

Para que las rectas r y s se corten, el sistema formando por ambas tiene que ser compatible determinado, por lo tanto los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada tienen que ser iguales. Como quiera que la matriz de coeficientes tiene de dimensión 4 x 3, el rango máximo que puede tener es tres, lo que significa que el determinante de la matriz ampliada tiene que ser, necesariamente, cero.

La matriz ampliada es $M'=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & m \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$|M'|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & m \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \{F_4 \to F_4-2F_2\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & m \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0$$

Desarrollando por los menores adjuntos de la tercera columna:

$$|M'|=-1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix}=0 \;;;\; \begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix}=0 \;;;\; -6-4m-2-m+16-3=0 \;;;$$

$$-5m+5=0 \;;;\; -m+1=0 \;;;\; \underline{m=1}$$

Las rectas r y s se cortan cuando m = 1.

b)

Para m = 1 las rectas son $r \equiv \begin{cases} 2x-y=1 \\ z+2y=3 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y=2 \\ x+2z=3 \end{cases}$, que son paralelas según el apartado anterior, por lo cual determinan un plano.

Las expresiones por unas ecuaciones paramétricas de las rectas son:

$$r \equiv \begin{cases} 2x-y=1 \\ z+2y=3 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=\lambda} \;;;\; \underline{y=-1+2\lambda} \;;;\; z=3-2y=\underline{5-4\lambda=z} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=5-4\lambda \end{cases}}$$

$$s \equiv \begin{cases} x+y=2 \\ x+2z=3 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \;;;\; \underline{x=3-2\lambda} \;;;\; y=2-x=\underline{-1+2\lambda=y} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

$$r \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u} = (1,\ 2,\ -4) \\ P(0,\ -1,\ 5) \end{cases} \quad ;; \quad s \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v} = (-2,\ 2,\ 1) \\ Q(3,\ -1,\ 0) \end{cases}$$

El plano π puede expresarse por ejemplo, mediante el punto P(0, -1, 5) y por los dos vectores de las rectas. La expresión general de π es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z-5 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 2x + 2(z-5) + 8(y+1) + 4(z-5) + 8x - (y+1) = 0 \ ;;$$

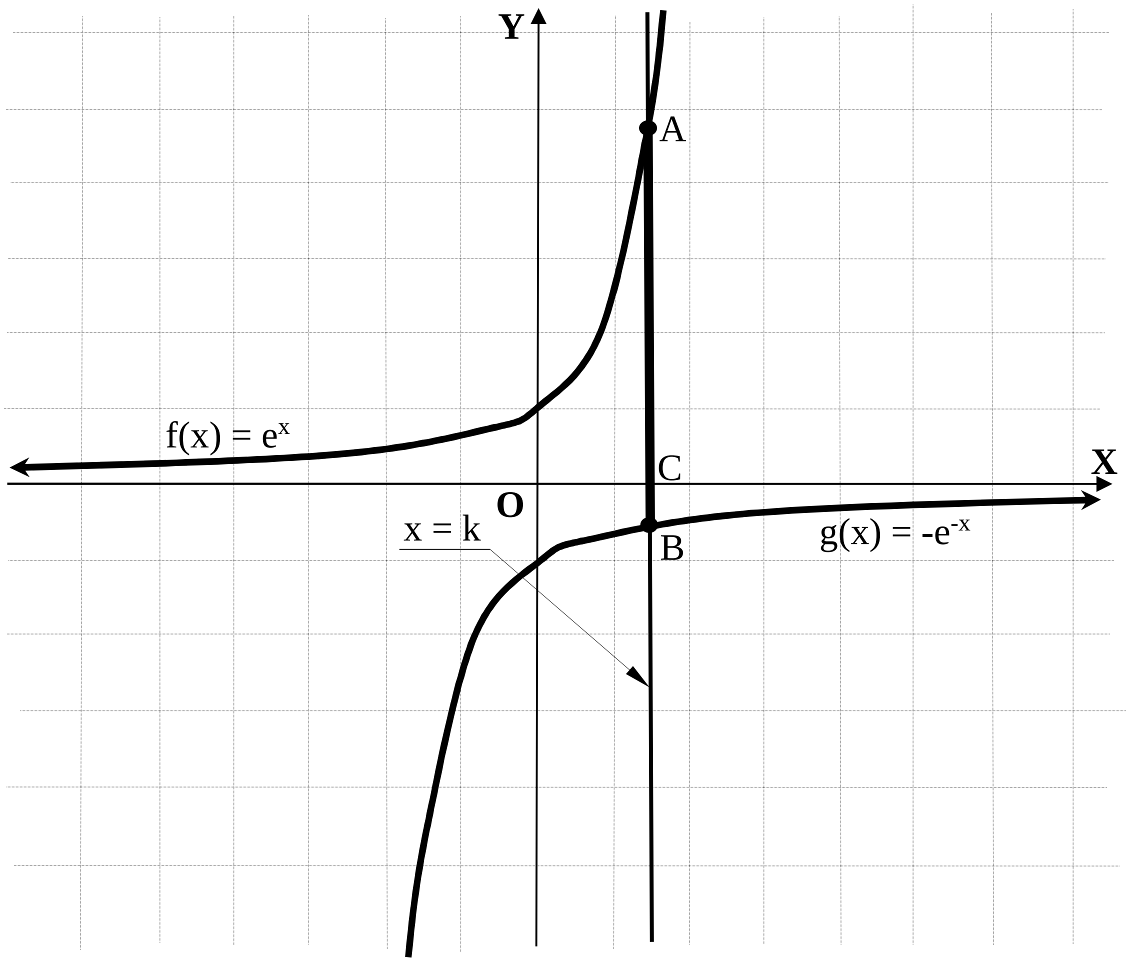
$$10x + 7(y+1) + 6(z-5) = 0 \ ;;\ 10x + 7y + 7 + 6z - 30 = 0 \ ;;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 10x + 7y + 6z - 23 = 0}}$$

****

2º) Considérense las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=-e^{-x}$. Para cada recta r perpendicular al eje OX, sean A y B los puntos de la recta con las gráficas de f y g, respectivamente. Determínese la recta r para la cual el segmento AB es de longitud mínima.

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la indicada en la figura.



De la figura se deduce que $L=\overline{AB}=\overline{AM}+\overline{MB}=e^x+\left|-e^{-x}\right|=e^x+e^{-x}$.

El valor de L será mínimo cuando su derivada sea cero:

$$L'=e^x-e^{-x}=e^x-\frac{1}{e^x}=\underline{\frac{e^{2x}-1}{e^x}}=L' \;;;\; L'=0 \Rightarrow e^{2x}-1=0 \;;;\; e^{2x}=1 \Rightarrow \underline{x=0}$$

Vamos a justificar que para x = 0 se trata de un mínimo:

$$L''=e^x+e^{-x}=e^x+\frac{1}{e^x}=\underline{\frac{e^{2x}+1}{e^x}}=L'' \;;;\; L''(0)=\frac{e^0+1}{e^0}=\frac{1+1}{1}=2>0 \Rightarrow \underline{Mínimo,\ c.q.j.}$$

<u>El segmento AB es mínimo cuando pertenece a la recta x = 0.</u>

****

CUESTIONES

1ª) Hállense las matrices A cuadradas de orden 2, que verifique la siguiente igualdad: $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;;;$$

$$\begin{pmatrix} a+b & 0+b \\ c+d & 0+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+0 & b+0 \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \underline{b=0} \\ a=d \\ c=d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{b=0} \\ a=c=d \end{cases}$$

$$\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & a \end{pmatrix},\ \forall a \in R}}$$

****

2ª) Calcúlese la distancia del punto P(1, 1, 1) a la recta $r \equiv \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = -\lambda \end{cases}$.

La distancia de un punto P a una recta r viene dada por la siguiente fórmula: $d(P,\ r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$, siendo Q un punto de la recta r y $\overrightarrow{v}$ un vector director de la recta r.

Un punto de la recta r es Q(-2, 0, 0) y un vector director $\overrightarrow{v} = (2,\ 0,\ -1)$.

$$\overrightarrow{QP} = P - Q = (1,\ 1,\ 1) - (-2,\ 0,\ 0) = \underline{(3,\ 1,\ 1) = \overrightarrow{QP}}$$

$$d(P,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|-i + 2j - 2k + 3j|}{\sqrt{4 + 0 + 1}} = \frac{|-i + 5j - 2k|}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(-1)^2 + 5^2 + (-2)^2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{1 + 25 + 4}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{30}{5}} = \underline{\underline{\sqrt{6}\ u = d(P,\ r)}}$$

****

3ª) Calcúlese el valor de $\lim_{x \to 0} \frac{L[\cos(2x)]}{x^2}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{L[\cos(2x)]}{x^2} = \frac{L[\cos 0]}{0^2} = \frac{L1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-2\,sen\,(2x)}{\cos(2x)}}{2x} = -\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{\cos(2x)} \cdot \frac{sen\,(2x)}{x} \right] = -\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(2x)} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{sen\,(2x)}{x} =$$

$$= -\frac{1}{\cos 0} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{sen\,(2x)}{x} = -\lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot sen\ x \cdot \cos\ x}{x} = -2 \lim_{x \to 0} \cos\ x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} =$$

$$= -2 \cdot 1 \cdot 1 = \underline{\underline{-2}}$$

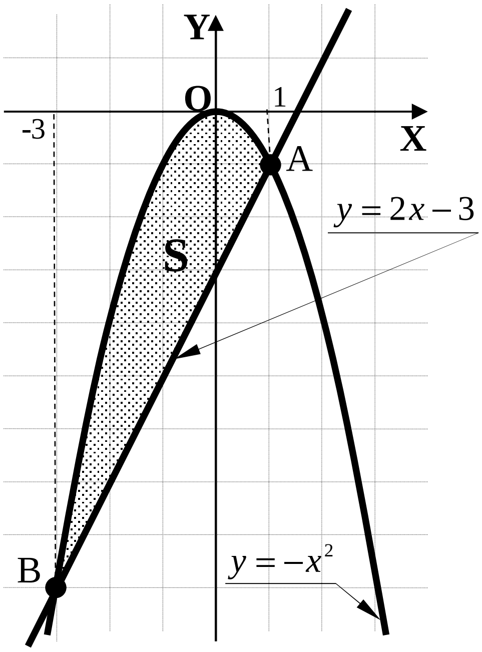
<u>Nota</u>: Se da por entendido que $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$.

****

4ª) Hállese el área del recinto limitado por la parábola $y=-x^2$ y la recta $y=2x-3$.

En primer lugar dibujamos la situación, para lo cual determinamos los puntos de corte de ambas funciones:

$$\left.\begin{array}{l} y=-x^2 \\ y=2x-3 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2=2x-3 \;;;\; x^2+2x-3=0 \;;;\; x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-3 \end{cases}$$



Los puntos de corte son: A(1, -1) y B(-3, -9).

Todas las ordenadas de la parábola son iguales o mayores que las de la recta en el intervalo determinado por los límites de integración que es (-3, 1).

El área pedida es:

$$S=\int_{-3}^{1}\left[-x^2-(2x-3)\right]\cdot dx=\int_{-3}^{1}\left(-x^2-2x+3\right)\cdot dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-3}^{1}=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_{-3}^{1}=$$

$$=\left(-\frac{1^3}{3}-1^2+3\cdot 1\right)-\left[-\frac{(-3)^3}{3}-(-3)^2+3\cdot(-3)\right]=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)-(9-9-9)=-\frac{1}{3}+2+9=11-\frac{1}{3}=\frac{33-1}{2}=\underline{\underline{\frac{32}{3}\ u^2=S}}$$

****

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ (1+a)y+z=4 \\ x+2y+az=4 \end{cases}$.

a) Discútase el sistema según el valor del parámetro a.

b) Resuélvase el sistema para a = 2.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1+a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \quad y \quad M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1+a & 1 & 4 \\ 1 & 2 & a & 4 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1+a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=a(1+a)+2-(1+a)-2=a+a^2-1-a=a^2-1=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{a_1=1} \\ \underline{a_2=-1} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Para \ \begin{cases} a\neq 1 \\ a\neq -1 \end{cases} \Rightarrow Rango\ \ M=Rango\ \ M'=3=n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Deter\min ado}}$$

$$Para\ \ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3=2C_2\} \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=4+4-3-4=8-7=1\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=3}$$

$$Para\ \ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3=2C_1\} \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=4+4-3+4=12-3=9\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=3}$$

$$Para\ \begin{Bmatrix} a=1 \\ a=-1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M \neq Rango\ M' \Rightarrow\ Incompatible$$

b)

Para a = 2 resulta el sistema $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 3y+z=4 \\ x+2y+2z=4 \end{cases}$. Resolviendo por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{18+8+8-12-6-16}{6+2-3-2}=\frac{34-34}{8-5}=\frac{0}{3}=\underline{\underline{0=x}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{3}=\frac{8+3-4-4}{3}=\frac{11-8}{3}=\frac{3}{3}=\underline{\underline{1=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{3}=\frac{12+8-9-8}{3}=\frac{12-9}{3}=\frac{3}{3}=\underline{\underline{1=z}}$$

****

2º) Dada la función $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, se pide:

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los de concavidad y convexidad, los puntos de inflexión y las asíntotas de f. Esbócese su gráfica.

b) Calcúlese el área de la región limitada por dicha gráfica y las recta x = 0, y = 0.

----

a)

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es $D(f) \Rightarrow R-\{-1\}$, los intervalos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-(x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\underline{\frac{2}{(x+1)^2}=f'(x)}$$

$$f'(x)>0,\ \forall x \in D(f)\ \Rightarrow \underline{\underline{La\ \ función\ \ es\ \ creciente\ \ en\ \ su\ \ dominio.}}$$

Los intervalos de concavidad y convexidad se estudian a través de la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{0-2\cdot 2\cdot(x+1)\cdot 1}{(x+1)^4}=\underline{\frac{-4}{(x+1)^3}=f''(x)}$$

$$x<-1 \Rightarrow f''(x)>0\ \Rightarrow \underline{\underline{Convexa\ \ (\cup) \Rightarrow (-\infty,\ -1)}}$$

$$.x>-1 \Rightarrow f''(x)<0\ \Rightarrow \underline{\underline{Cóncava\ \ (\cap) \Rightarrow (-1,\ \infty)}}$$

Para que existan puntos de inflexión es condición necesaria que la segunda derivada sea cero.

$$f''(x)=\frac{-4}{(x+1)^3}\ ;;\ f''(x)=0 \Rightarrow \frac{-4}{(x+1)^3}=0\ ;;\ x \notin R\ \Rightarrow \underline{\underline{No\ tiene\ \ puntos\ \ de\ \ inflexión}}$$

Las asíntotas de la función son las siguientes:

<u>Horizontales</u>: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

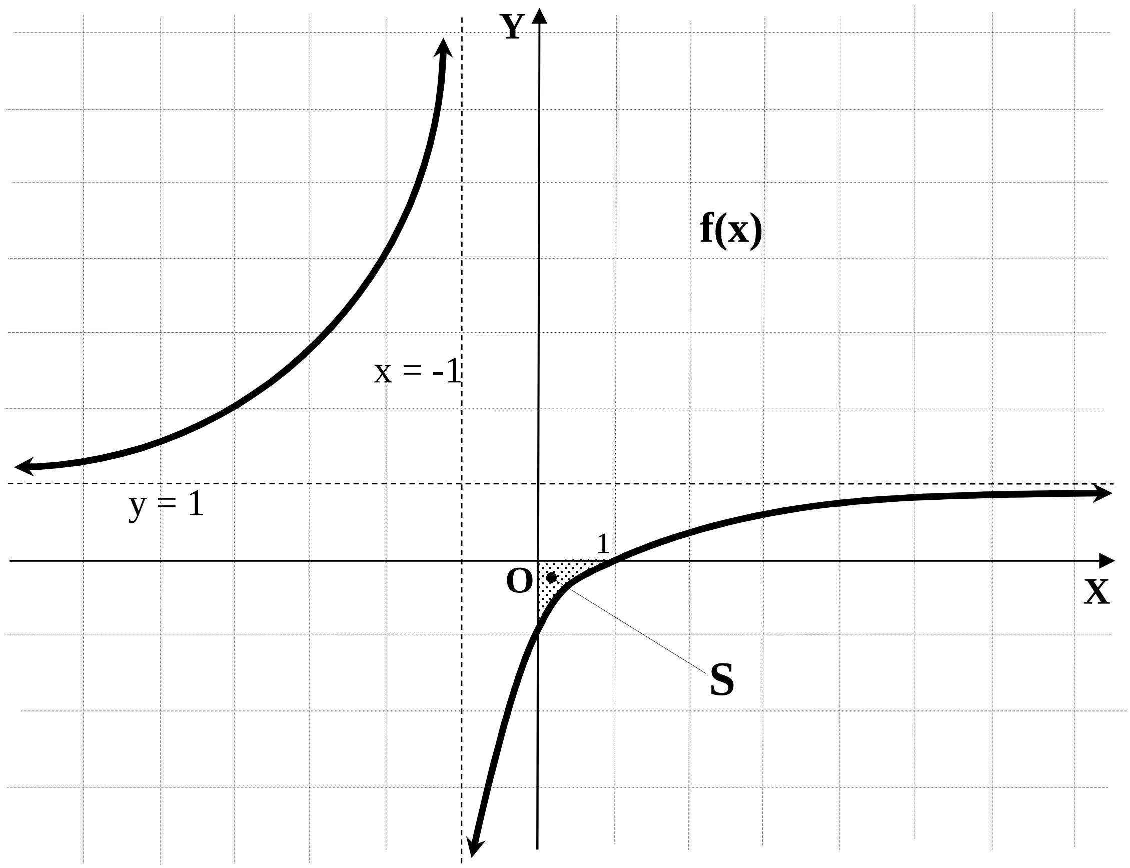
$$y=k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x+1}=\underline{\underline{1=y}}$$

<u>Verticales</u>: son los valores de x que anulan el denominador: $x+1=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{x=-1}}$

Oblicuas: <u>No tiene.</u>

(Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

La representación gráfica de la función es la siguiente:



b)

El área a calcular es la sombreada de la figura, cuyo valor es el siguiente:

$$S=-\int_0^1 f(x)\cdot dx=\int_1^0 \frac{x-1}{x+1}\cdot dx=\int_1^0 \frac{x+1-2}{x+1}\cdot dx=\int_1^0\left(1-\frac{2}{x+1}\right)\cdot dx=\int_1^0 dx-2\int_1^0 \frac{1}{x+1}\cdot dx=$$

$$=[x]_1^0-2I_1=0-1-2I_1=\underline{-1-2I_1=S}\qquad (*)$$

$$I_1=\int_1^0 \frac{1}{x+1}\cdot dx\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x+1=t \\ dx=dt \end{array}\right\| \left.\begin{array}{c} x=0\rightarrow t=1 \\ x=1\rightarrow t=2 \end{array}\right\}\Rightarrow\ I_1=\int_2^1 \frac{1}{t}\cdot dt=[L\,t]_2^1=L1-L2=0-L2=$$

$$=\underline{-L2=I_1}$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de I_1 queda, finalmente:

$$S=-1-2\cdot(-L2)=2L2-1=\underline{\underline{(L4-1)\,u^2=S}}$$

****

<u>CUESTIONES</u>

1ª) Dadas las matrices $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ y $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, hállese razonadamente la matriz B sabiendo que B · P = A.

Multiplicando por la derecha por P^{-1} en la expresión B · P = A, resulta:

$$B\cdot P\cdot P^{-1}=A\cdot P^{-1}\ ;;\ B\cdot I=A\cdot P^{-1}\ ;;\ \underline{B=A\cdot P^{-1}}\qquad (*)$$

La matriz inversa de P se obtiene del siguiente modo:

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\ ;;\ |P|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-1+1+1=\underline{1=|P|}\ ;;\ P^T=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$Adj\left(P^T\right)=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=P^{-1}}$$

Sustituyendo el valor de P^{-1} en la expresión (*), queda:

$$B=A\cdot P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+0+0 & 1+0+0 & -1-0+0\\ 0-0+0 & -0-1+0 & 0+1+0\\ 0+0+2 & -0+0+0 & 0-0+2\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}}}$$

****

2ª) Hállese la distancia entre el plano π, que pasa por los puntos A(2, 0, -1), B(0, 0, 0) y C(1, 1, 2), y el plano $\beta \equiv x - 5y + 2z - 6 = 0$.

La ecuación general del plano π rededuce de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 0,\ 0) - (2,\ 0,\ -1) = (-2,\ 0,\ 1)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (1,\ 1,\ 2) - (2,\ 0,\ -1) = (-1,\ 1,\ 3)$$

$$\pi(B;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ -y - 2z - x + 6y = 0\ ;;\ \underline{\pi \equiv x - 5y + 2z = 0}$$

Como puede observarse, (y cabía esperar), los planos $\pi\ y\ \beta$ son paralelos, por lo cual su distancia es la misma que la de cualquiera de los puntos dados al plano β. Por facilidad tomamos el punto B que es el origen de coordenadas; la fórmula que da la distancia de un plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ al origen de coordenadas O es la siguiente: $d(O,\ \pi) = \dfrac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicada al caso que nos ocupa es:

$$d(B,\ \beta) = \frac{|-6|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{1 + 25 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{30}} = \frac{6\sqrt{30}}{30} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

$$\underline{\underline{d(\pi,\ \beta) = \frac{\sqrt{30}}{5}\ u}}$$

****

3ª) Sea $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Determínense a, b, c y d para que la recta $r\equiv y+1=0$ sea tangente a la gráfica de f en el punto P(0, -1), y la recta $s\equiv x-y-2=0$ sea tangente a la gráfica de f en el punto Q(1, -1).

Por pasar la función por el punto P(0, 1) es $f(0)=-1 \Rightarrow \underline{\underline{d=-1}}$.

Por pasar la función por el punto Q(1, -1) es $f(1)=-1$:

$$f(1)=a+b+c-1=-1 \;;;\; \underline{a+b+c=0} \qquad (1)$$

La recta r es paralela al eje de abscisas, por lo cual su pendiente en P(0, -1) es 0. Sabiendo que la pendiente a una función en un punto es la derivada de la función en ese punto sería:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \;;;\; f'(0)=0 \Rightarrow \underline{\underline{c=0}}$$

La recta s tiene de pendiente 1 en Q(1, -1).

$$f'(x)=3ax^2+2bx \;;;\; f'(1)=1 \Rightarrow \underline{3a+2b=1} \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema formando por las ecuaciones (1) y (2) y teniendo en cuenta que c = 0, obtenemos los valores restantes pedidos:

$$\left.\begin{array}{r} a+b=0 \\ 3a+2b=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -2a-2b=0 \\ 3a+2b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{a=1}} \;;;\; \underline{\underline{b=-1}}$$

$$\underline{\underline{La \;\; función \;\; es \;\; f(x)=x^3-x^2-1}}$$

****

4ª) Determínense los valores de a y b para los cuales $\lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos x}{sen\ x^2} = 1$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos x}{sen\ x^2} = \frac{1 - \cos 0}{sen\ 0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{2ax + b + sen\ x}{2x \cdot \cos x^2} = \frac{0 + b + 0}{0 \cdot \cos 0} = \frac{b}{0} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{b = 0}}$$

Conociendo que b = 0, resulta: $\lim_{x \to 0} \frac{2ax + sen\ x}{2x \cdot \cos x^2} = 1$. Resolviendo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2ax + sen\ x}{2x \cdot \cos x^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{2a + \cos x}{2 \cdot \cos x^2 - 2x \cdot 2x \cdot sen\ x^2} =$$

$$= \frac{2a + \cos 0}{2 \cdot \cos 0 - 0} = \frac{2a + 1}{2 \cdot 1} = \frac{2a+1}{2} = 1\ ;;\ 2a + 1 = 2\ ;;\ 2a = 1\ ;;\ \underline{\underline{a = \frac{1}{2}}}$$

****