PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LEÓN

SEPTIEMBRE – 2006

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora “en línea”. No se admitirá el uso de memoria para texto, ni las prestaciones gráficas.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma en el orden deseado.

PRUEBA A

PROBLEMAS

1º) a) Dados la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv ax - y + z + 1 = 0$, hállese el valor de a para que la recta r y el plano π sean paralelos.

b) Para a = 2, calcúlese la ecuación del plano α que contiene a r y es perpendicular a π, y hállese la distancia entre r y π.

----

a)

La recta r y el plano π son paralelos cuando el vector director de la recta sea perpendicular al vector normal al plano.

Para determinar un vector director de la recta la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad z = \lambda \quad \Rightarrow \left. \begin{matrix} x - y = 1 - 2\lambda \\ 2x + y = 2 + 5\lambda \end{matrix} \right\} \ ;; \ 3x = 3 + 3\lambda \ ;; \ \underline{x = 1 + \lambda}$$

$$x - y + 2z = 1 \ ;; \ y = x + 2z - 1 = 1 + \lambda + 2\lambda - 1 = \underline{3\lambda = y} \ \Rightarrow \ \underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v} = (1, \ 3, \ 1)$.

Un vector normal del plano es $\overrightarrow{n} = (a, \ -1, \ 1)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = (1, \ 3, \ 1) \cdot (a, \ -1, \ 1) = a - 3 + 1 = a - 2 = 0 \ \Rightarrow \ \underline{\underline{a = 2}}$$

b)

Si el plano α contiene a la recta r, contiene a todos sus puntos. Un punto de la recta r es P(1, 0, 0).

El plano α tiene como vectores directores al vector director de la recta r y al vector normal al plano π; su ecuación vectorial es la siguiente:

$$\underline{\underline{\alpha\left(P; \ \overrightarrow{v}, \ \overrightarrow{n}\right) \equiv (x, \ y, \ z) = (1, \ 0, \ 0) + \lambda(1, \ 3, \ 1) + \mu(2, \ -1, \ 1), \ \ \forall \lambda, \ \mu \in R}}$$

Por ser la recta r y el plano π paralelos, la distancia entre ellos es la misma que la distancia de cualquiera de los puntos de la recta al plano.

La distancia de un punto a un plano es $d(P, \ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, que aplicada al punto P(1, 0, 0) y al plano $\pi \equiv 2x - y + z + 1 = 0$, sería:

$$d(\pi, \ r) = d(P, \ \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|2 - 0 + 0 + 1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{2} \ unid. = d(\pi, \ r)}}.$$

****

2º) a) Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x e^{-x}$, sus máximos y mínimos relativos, asíntotas y puntos de inflexión. Demuéstrese que para todo x se tiene $f(x) \leq \frac{1}{e}$.

b) Pruébese que la ecuación $3x = e^x$ tiene alguna solución en $(-\infty,\ 1]$.

----

a)

La función está definida en R.

Los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$f(x) = \frac{x}{e^x} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x (1-x)}{e^{2x}} = \underline{\frac{1-x}{e^x} = f'(x)}$$

$$x < 1 \;\Rightarrow\; f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Creciente\ \ en\ \ (-\infty,\ 1)}}$$

$$x > 1 \;\Rightarrow\; f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Decreciente\ \ en\ \ (1,\ \infty)}}$$

Los máximos y mínimos relativos son:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-x}{e^x} = 0 \ ;;\ 1 - x = 0 \ ;;\ \underline{x = 1}$$

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot e^x - (1-x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{-1-(1-x)}{e^x} = \frac{-1-1+x}{e^x} = \underline{\frac{x-2}{e^x} = f''(x)}$$

$$f''(1) = \frac{1-2}{e^1} = \frac{-1}{e} < 0 \;\Rightarrow\; \underline{M\acute{a}ximo\ \ relativo\ \ para\ \ x = 1}$$

$$f(1) = \frac{1}{e^1} = \frac{1}{e} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{M\acute{a}x.\ \ P\left(1,\ \frac{1}{e}\right)}}$$

Las asíntotas son:

<u>Paralelas a X:</u>

$$y = k = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} = \frac{1}{e^x} = \underline{\underline{0 = y}}$$

$$y = k = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{-\infty}{e^{-\infty}} = -\infty \cdot \infty = -\infty \;\Rightarrow\; \underline{\underline{No}}$$

Paralelas a Y: $e^x = 0 \Rightarrow x \notin R \Rightarrow \underline{\underline{No\ \ tiene}}$

Oblicuas: son de la forma y = mx + n

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x \cdot e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{No\ \ tiene}}$$

Determinamos ahora los puntos de inflexión:

$$f(x) = \frac{x}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \underline{\frac{1-x}{e^x} = f'(x)}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-2}{e^x} = 0\ ;;\ x - 2 = 0\ ;;\ \underline{x = 2}$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot e^x - (x-2) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{1-(x-2)}{e^x} = \frac{1-x+2}{e^x} = \underline{\frac{3-x}{e^x} = f'''(x)}$$

$$f'''(2) = \frac{3-2}{e^2} = \frac{1}{e^2} \neq 0 \Rightarrow Punto\ \ de\ \ \inf lexión\ \ para\ \ x = 2:$$

$$f(2) = \frac{2}{e^2} \Rightarrow \underline{\underline{P.\ I.\left(2,\ \frac{1}{e^2}\right)}}$$

Por tratarse de una función continua en su dominio, que es R, y ser estudiando sus periodos de crecimiento y decrecimiento, el máximo obtenido en el punto $P\left(1,\ \frac{1}{e}\right)$ es un máximo absoluto, lo que demuestra lo pedido: que $f(x) \leq \frac{1}{e},\ \forall x \in R$.

b)

Para probar que la ecuación $3x = e^x$ tiene alguna solución en $(-\infty,\ 1]$, consideramos la función $f(x) = 3x - e^x$.

Probar que la ecuación $3x = e^x$ tiene alguna solución en $(-\infty,\ 1]$ es equivalente a demostrar que la función f(x) tiene alguna solución en el intervalo indicado, o sea, que se anula para algún punto del intervalo.

La función $f(x) = 3x - e^x$ es continua en su dominio, que es R, por ser la suma de dos funciones continuas que tienen ambas por dominio R; esto significa que f(x) es continua en el intervalo considerado..

Según el teorema de Bolzano, se trata de encontrar dos valores de x, a y b, pertenecientes al intervalo, tales que hagan f(a) > 0 y f(b) < 0, o viceversa.

$$Por \ \ ejemplo: \ \{a=0, \ b=1\} \Rightarrow \begin{cases} f(0)=3\cdot 0-e^{0}=0-1=-1<0 \\ \\ f(1)=3\cdot 1-e^{1}=3-e>0 \end{cases}$$

Lo anterior nos permite asegurar que en el intervalo $(-\infty, \ 1]$ la ecuación $3x=e^{x}$ tiene al menos una solución, como teníamos que probar.

****

CUESTIONES

1ª) Sea m un número real. Discútase, en función de m, el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 2 & m+1 & 2 \end{pmatrix}$.

Por tratarse de un sistema lineal homogéneo, la matriz ampliada tiene el mismo rango que la matriz de coeficientes.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$Rango\ \ A \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 2 & m+1 & 2 \end{vmatrix} = 2m + m + 1 + 2m - 2m - 2 - m^2 - m = -m^2 + 2m - 1 = 0\ \ ;;$$

$$m^2 - 2m + 1 = 0\ \ ;;\ \ (m-1)^2 = 0\ \ ;;\ \ \underline{m = 1}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m \neq 1 \Rightarrow Rango\ \ A = Rango\ \ A' = 3 \Rightarrow Compatible\ \ \det er\min ado}}$$

$$\underline{\underline{(Solución\ \ trivial:\ \ x = y = z = 0)}}$$

Para m = 1 la matriz resulta $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 1; el sistema resultante es la ecuación: $x + y + z = 0$, que tiene infinitas soluciones. Para obtenerlas tenemos que parametrizar dos de las incógnitas, por ejemplo: $\begin{cases} y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow\ x + \lambda + \mu = 0$.

$$\underline{\underline{Solución\ \ para\ \ m = 1\ \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases},\ \ \forall \lambda,\ \ \mu \in R}}$$

****

2ª.- Hállense las ecuaciones de la recta r que pasa por el punto P(2, 1, -1), está contenida en el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 1$, y es perpendicular a la recta $s \equiv \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z + 4 \end{cases}$.

Evidentemente el punto P está contenido en el plano.

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es: $s \equiv \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$; un vector director de s es $\overrightarrow{v} = (2,\ 1,\ 1)$.

El plano α, perpendicular a s y que pasa por P(2, 1, -1) es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv 2x + y + z + D = 0 \\ P(2,\ 1,\ -1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 2 + 1 - 1 + D = 0\ ;;\ D = -4 \Rightarrow \underline{\alpha \equiv 2x + y + z - 4 = 0}$$

La recta r pedida es la intersección de los planos $\alpha\ y\ \pi$:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} \alpha \equiv 2x + y + z - 4 = 0 \\ \pi \equiv x + 2y + 3z - 1 = 0 \end{cases}}}$$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} \alpha \equiv 2x + y + z - 4 = 0 \\ \pi \equiv x + 2y + 3z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda}\ ;;\ \left.\begin{array}{r} 2x + y = 4 - \lambda \\ x + 2y = 1 - 3\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -4x - 2y = -8 + 2\lambda \\ x + 2y = 1 - 3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x = -7 - \lambda\ ;;\ \underline{x = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}\lambda}\ ;;\ y = 4 - \lambda - 2x = 4 - \lambda - \frac{14}{3} - \frac{2}{3}\lambda = \underline{-\frac{2}{3} - \frac{5}{3}\lambda = y}$$

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}\lambda \\ y = -\frac{2}{3} - \frac{5}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

A título de comprobación: un vector director de r es $\overrightarrow{w} = (1,\ -5,\ 3)$, que es perpendicular al vector director de la recta s, $\overrightarrow{v} = (2,\ 1,\ 1)$, por ser su producto escalar cero.

Por otra parte el punto P(2, 1, -1) pertenece a r, como cabía esperar.

****

3ª.- Calcúlese $\lim_{x \to 0} \dfrac{L\cos x - 1 + \cos x}{x^2}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{L\cos x - 1 + \cos x}{x^2} = \frac{L1 - 1 + 1}{0^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{In}\det. \Rightarrow (L\text{`}Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{-\dfrac{sen\ x}{\cos x} - 0 - sen\ x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-tag\ x - sen\ x}{2x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{In}\det. \Rightarrow (L\text{`}Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{-\dfrac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{2} = \frac{-\dfrac{1}{1} - 1}{2} = \frac{-2}{2} = \underline{\underline{-1}}$$

****

4ª.- Calcúlese el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ y por la recta tangente a dicha curva en el punto x = 0.

La recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ es la siguiente:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \;\;;;\;\; f'(0) = \underline{m = 2}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} m = 2 \\ O(0,\ 0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow \underline{Tangente:\ y = 2x}$$

Los puntos de corte de la curva y su tangente por O(0, 0) son los siguientes:

$$\left.\begin{matrix} y = x^3 - 3x^2 + 2x \\ y = 2x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 2x \;\;;;\;\; x^3 - 3x^2 = 0 \;\;;;\;\; x^2(x - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 = 0 \rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \\ x_2 = 3 \rightarrow \underline{P(3,\ 6)} \end{matrix}\right.$$

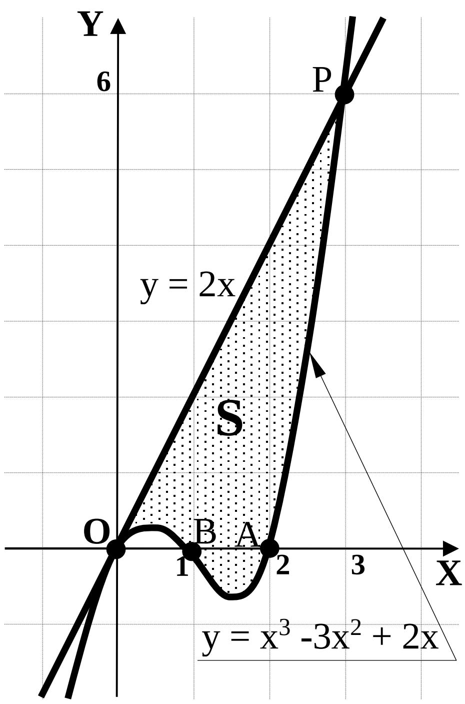
Para tener una idea exacta de la situación hacemos su representación gráfica.

Los puntos de corte con el eje X de la curva son los siguientes:

$$y = x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \;\;;;\;\; x(x^2 - 3x + 2) = 0 \;\;;;\;\; x_1 = 0 \rightarrow O(0,\ 0). \;\;;;\;\; x^2 - 3x + 2 = 0 \;\;;;$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_2 = 2 \rightarrow \underline{A(2,\ 0)} \\ x_2 = 1 \rightarrow \underline{B(1,\ 0)} \end{matrix}\right.$$

La representación gráfica, aproximada, de la situación, es la que se indica en la figura.



De la observación de la figura se deduce que el área pedida S es la siguiente:

$$S = \int_0^3 2x \cdot dx - \int_0^3 (x^3 - 3x^2 + 2x) \cdot dx =$$

$$= [x^2]_0^3 + \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_3^0 = (3^2 - 0) - \left(\frac{3^4}{4} - 3^3 + 3^2\right) =$$

$$= 9 - \frac{81}{4} + 27 - 9 = 27 - \frac{81}{4} = \frac{108 - 81}{4} = \underline{\underline{\frac{27}{4}\ u^2 = S}}$$

****

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) Discútase, en función del valor del parámetro k, el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} kx+3y=0 \\ 3x+2y=k \\ 3x+ky=0 \end{cases}$. Resuélvase el sistema cuando sea compatible.

Se trata de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes: $A=\begin{pmatrix} k & 3 \\ 3 & 2 \\ 3 & k \end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ 3 & 2 & k \\ 3 & k & 0 \end{pmatrix}$.

El rango de las matrices de coeficientes y ampliada en función del parámetro k es:

$$Rango\ \ de\ \ A'\ \Rightarrow \begin{vmatrix} k & 3 & 0 \\ 3 & 2 & k \\ 3 & k & 0 \end{vmatrix} = 9k-k^3 = k\left(9-k^2\right)=0\ \Rightarrow \begin{cases} \underline{k_1=0} \\ \underline{k_2=3} \\ \underline{k_3=-3} \end{cases}$$

$$Para\ \ k=0\ \Rightarrow\ A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ de\ \ A=Rango\ \ de\ \ A'=2}$$

$$Para\ \ k=3\ \Rightarrow\ A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ de\ \ A=Rango\ \ de\ \ A'=2}$$

$$Para\ \ k=-3\ \Rightarrow\ A=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ de\ \ A=Rango\ \ de\ \ A'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ \left\{ \begin{array}{c} k\neq 0 \\ k\neq 3 \\ k\neq -3 \end{array} \right\} \Rightarrow Rango\ \ A=2\ \ ;;\ \ Rango\ \ A'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \left\{ \begin{array}{c} k=0 \\ k=3 \\ k=-3 \end{array} \right\} \Rightarrow Rango\ \ A=2\ \ ;;\ \ Rango\ \ A'=2=n^o\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Deter\min ado}}$$

Para resolverlo en los diferentes casos despreciamos una de las ecuaciones, por ejemplo, la última, resultando el sistema: $\begin{cases} kx + 3y = 0 \\ 3x + 2y = k \end{cases}$.

Para k = 0 el sistema es homogéneo y la solución es la trivial: $\underline{\underline{x = y = z = 0.}}$

Para k = 3 $\Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases} \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases} \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}}}$

Para k = -3 $\Rightarrow \begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = -3 \end{cases} \begin{cases} -x + y = 0 \\ 3x + 2y = -3 \end{cases} \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 3x + 2y = -3 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}}}$

****

2º) Sea la función $f(x)=\frac{4-2x^2}{x}$:

a) Determínese el dominio de f, sus asíntotas, simetrías y máximos y mínimos relativos. Esbócese su gráfica.

b) Calcúlese $\int_1^{\sqrt{2}} f(x)\cdot L\,x\cdot dx$.

----

a)

Por tratarse de una función racional está definida para todos los valores reales de x, excepto para aquel o aquellos que anulan el denominador. En el caso que nos ocupa el dominio es: $\underline{\underline{D(f)\Rightarrow R-\{0\}}}$.

Las asíntotas de la función son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma f cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x}=\pm\infty \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{No\ \ tiene}}$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$\underline{\underline{x=0\ \Rightarrow\ El\ \ eje\ \ Y}}$$

Oblicuas: Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador, que es lo que ocurre en nuestro caso.

Son de la forma $y=mx+n \quad (m\neq 0\ ;\ m\neq\infty)$.

$$m=\underset{x\to+\infty}{ím}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4-2x^2}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-2x^2}{x^2}=\underline{-2=m}$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-m\,x]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-2x^2}{x}+2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-2x^2+2x^2}{x}=\underline{0=n}$$

Es asíntota oblicua la recta y = -2x.

Las simetrías que estudiamos son las siguientes:

1) Con respecto al eje Y; tiene que cumplirse que $f(x)=f(-x)$.

2) Con respecto al origen; tiene que cumplirse que $f(-x) = -f(x)$

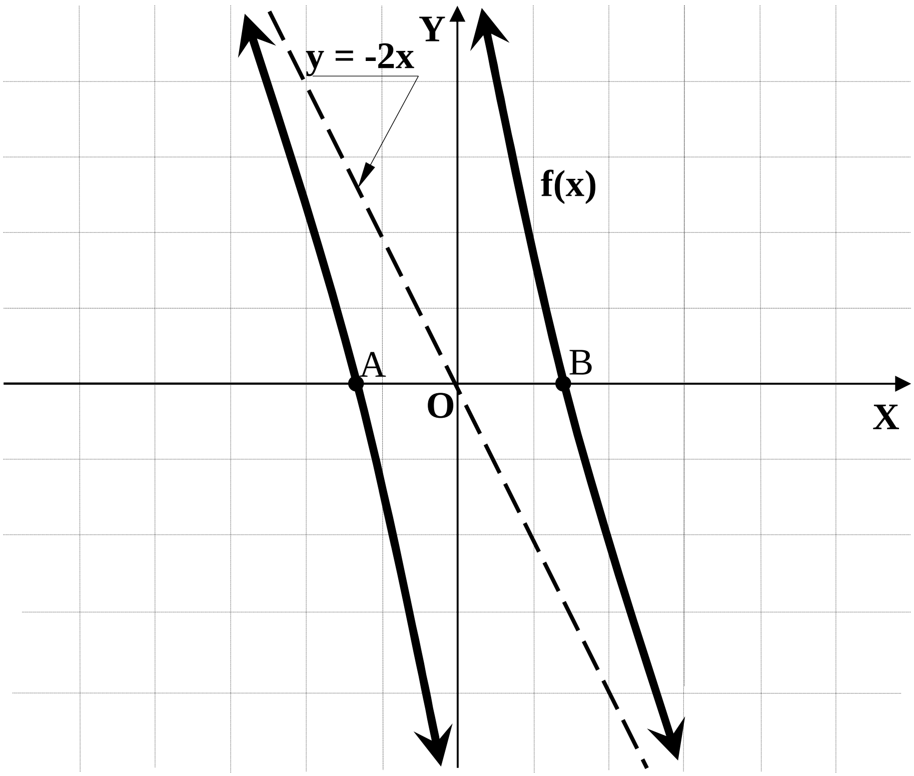
$$f(-x) = \frac{4 - 2 \cdot (-x)^2}{-x} = -\frac{4 - 2x^2}{x} = -f(x) \Rightarrow$$ Es simétrica con respecto al origen.

Los máximos y mínimos relativos son:

$$f'(x) = \frac{-4x \cdot x - 1 \cdot (4 - 2x^2)}{x^2} = \frac{-4x^2 - 4 + 2x^2}{x^2} = \frac{-2x^2 - 4}{x^2} = -2 \cdot \frac{x^2 + 2}{x^2} = f'(x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2 \cdot \frac{x^2 + 2}{x^2} = 0 \;;;\; x^2 + 2 = 0 \;;;\; x \notin R \Rightarrow \textit{No tiene máximos ni mínimos rel.}$$

Teniendo en cuenta la simetría de la función, que $f'(x) < 0, \; \forall x \in D(f)$ lo cual significa que la función es monótona decreciente en su dominio y que corta al eje X en los puntos $A\left(-\sqrt{2}, \; 0\right)$ y $B\left(\sqrt{2}, \; 0\right)$, la representación gráfica, aproximada, es la siguiente:



b)

$$\int_1^{\sqrt{2}} f(x) \cdot Lx \cdot dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{4 - 2x^2}{x} \cdot Lx \cdot dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{4Lx}{x} \cdot dx - \int_1^{\sqrt{2}} 2x \cdot Lx \cdot dx = A - B \quad (*)$$

$$A = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{4Lx}{x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Lx = t \\ \frac{1}{x} \cdot dx = dt \end{array} \right\| \begin{array}{c} x = \sqrt{2} \rightarrow t = \frac{1}{2} L2 \\ x = 1 \rightarrow t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \int_0^{\frac{1}{2}L2} 4t \cdot dt = \left[2t^2\right]_0^{\frac{1}{2}L2} =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} L2\right)^2 - 0 = \frac{1}{2} L^2 \, 2 = A$$

$$B=\int_1^{\sqrt{2}} 2x\cdot L\,x\cdot dx \;\Rightarrow\; \left\{\begin{matrix} L\,x=u\rightarrow \dfrac{1}{x}dx=du \\ 2x\,dx=dv\rightarrow v=x^2\end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; B=\left[L\,x\cdot x^2-\int x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot dx\right]_1^{\sqrt{2}}=$$

$$=\left[x^2\,L\,x-\int x\,dx\right]_1^{\sqrt{2}}=\left[x^2\,L\,x-\frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{2}}=\left(2\,L\sqrt{2}-1\right)-\left(1^2\cdot L1-\frac{1^2}{2}\right)=L\,2-1-\left(0-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=L\,2-1+\frac{1}{2}=\underline{L\,2-\frac{1}{2}=B}$$

Sustituyendo en (*) los valores de A y B, resulta:

$$\int_1^{\sqrt{2}} f(x)\cdot L\,x\cdot dx=\frac{1}{2}L^2\,2-\left(L\,2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}L^2\,2-L\,2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(L^2\,2-2L\,2+1\right)=\underline{\underline{\frac{1}{2}\left(L\,2-1\right)^2}}$$

****

CUESTIONES

1ª) ¿Existen máximos y mínimos absolutos de la función $f(x) = \cos\ x + 1$ en el intervalo $[0,\ \pi]$? Justifíquese su existencia y calcúlense.

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que su derivada sea cero:

$$f'(x) = -sen\ x = 0\ ;;\ sen\ x = 0\ \Rightarrow\ En\ [0,\ \pi] \Rightarrow \underline{x_1 = 0}\ ;;\ \underline{x_2 = \pi}$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos recurrimos a la segunda derivada:

$$f''(x) = -\cos\ x\ \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = -\cos\ 0 = -1 < 0\ \Rightarrow\ \underline{Máximo\ \ relativo\ \ para\ \ x = 0} \\ f''(\pi) = -\cos\ \pi = -(-1) = 1 > 0\ \Rightarrow\ \underline{Mínimo\ \ relativo\ \ para\ \ x = \pi} \end{cases}$$

$$f(0) = \cos\ 0 + 1 = 1 + 1 = 2\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\underline{Máx.\ \Rightarrow\ P(0,\ 2)}}$$

$$f(\pi) = \cos\ \pi + 1 = -1 + 1 = 0\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\underline{Mín.\ \Rightarrow\ Q(\pi,\ 1)}}$$

****

2ª.- Dada la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a+1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, determínense los valores reales de a para los cuales existe la matriz inversa de P.

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero:

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a+1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 5a + 5 + 8a - 3a(a+1) - 20 = 13a - 15 - 3a^2 - 3a = -3a^2 + 10a - 15 = 0$$

$$3a^2 - 10a + 15 = 0 \;\;;;\;\; a = \frac{10 \pm \sqrt{100-180}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{-80}}{6} \;\; \Rightarrow \;\; \underline{a \notin R}$$

$$\underline{\underline{La \;\; matriz \;\; P \;\; es \;\; inversible \;\; \forall a \in R.}}$$

****

3ª.- Calcúlense las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ en el punto x = 0.

El punto de la curva por el cual se trazan la tangente y la normal es:

$$y=f(0)=\frac{0^2}{0^2+1}=\frac{0}{1}=0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)}.$$

La pendiente a una función en un punto es valor de la derivada de la función en ese punto:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}=\underline{\frac{2x}{(x^2+1)^2}=f'(x)}$$

$$m=f'(0)=\frac{2\cdot 0}{(0^2+1)^2}=\frac{0}{1}=\underline{0=m}$$

Sabiendo que la ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la tangente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$:

$$\text{Recta tangente}:\quad y-0=0(x-0)=0\ \ ;;\ \ \underline{\underline{y=0\quad (Eje\ \ X)}}$$

Sabiendo que la pendiente de la recta normal es la inversa y de signo contrario del valor de la pendiente, la recta normal es:

$$\text{Recta normal}:\quad y-0=-\frac{1}{0}(x-0)\ \ ;;\ \ 0=-x\ \ ;;\ \ \underline{\underline{x=0\quad (Eje\ \ Y)}}$$

****

4ª.- El triángulo ABC es rectángulo en A, siendo A(3, 0, -1), B(6, -4, 5) y C(5, 3, z). Calcúlese el valor de z y hállese el área del triángulo.

Los vectores de origen A que determinan el triángulo son:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (6,\ -4,\ 5) - (3,\ 0,\ -1) = (3,\ -4,\ 6)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (5,\ 3,\ z) - (3,\ 0,\ -1) = (2,\ 3,\ z+1)$$

Para que los vectores sean perpendiculares su producto escalar tiene que ser 0:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (3,\ -4,\ 6) \cdot (2,\ 3,\ z+1) = 6 - 12 + 6z + 6 = 6z = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{z = 0}}$$

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores que lo definen, o sea, la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores mencionados:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 3 & -4 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \left| -4i + 9k + 12j + 8k - 18i - 3j \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| -22i + 9j + 17k \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-22)^2 + 9^2 + 17^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{484 + 81 + 289} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{854} \cong 29'22\ u^2 = S_{ABC}}}\ .$$

****