PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO - 2002

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora “en línea”. No se admitirá el uso de memoria para texto, ni las prestaciones gráficas.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma.

PRUEBA A

PROBLEMAS

1º) Sean A, B y X tres matrices cuadradas del mismo orden que verifican lo siguiente: $A \cdot X \cdot B = I$, siendo I la matriz unidad.

a) Si el determinante de A vale -1 y el de B vale 1, calcular razonadamente el determinante de X.

b) Calcular de forma razonada la matriz X si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

----

a)

$A \cdot X \cdot B = I \Rightarrow$ Multiplicando por la izquierda por A^{-1} y por la derecha por B^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot I \cdot B^{-1} \;\; ;; \;\; \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X \cdot \left(B \cdot B^{-1}\right) = \left(A^{-1} \cdot I\right) \cdot B^{-1} \;\; ;;$$

$$I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot B^{-1} \;\; ;; \;\; \underline{X = A^{-1} \cdot B^{-1}}$$

Teniendo en cuenta que el determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices y que el determinante de la inversa de una matriz es igual a la inversa del determinante:

$$|\,X\,|=|\,A^{-1}\,|\cdot\,|\,B^{-1}\,|=|\,A\,|^{-1}\cdot\,|\,B\,|^{-1}=(-1)^{-1}\cdot 1^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot 1=\underline{\underline{-1=|\,X\,|}}$$

b)

Este apartado lo vamos a resolver de dos formas diferentes:

I) Sea $X=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Entonces: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;;

$$\begin{pmatrix} 2a+3b & 2c+3d \\ 3a+4b & 3c+4d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ;;$$

$$\begin{pmatrix} 2a+3b+4c+6d & -4a-6b-6c-9d \\ 3a+4b+6c+8d & -6a-8b-9c-12d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} 2a+3b+4c+6d=1 \\ -4a-6b-6c-9d=0 \end{array}\right\}\ (1) \\ \\ \left.\begin{array}{r} 3a+4b+6c+8d=0 \\ -6a-8b-9c-12d=1 \end{array}\right\}\ (2) \end{array}\right\}$$

Multiplicando en (1) la primera ecuación por 2 y sumando queda: $2c+3d=2$.

Multiplicando en (2) la primera ecuación por 2 y sumando queda: $3c+4d=1$.

Resolviendo el sistema resultante:

$$\left.\begin{array}{r} 2c+3d=2 \\ 3c+4d=1 \end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{r} 6c+9d=6 \\ -6c-8d=-2 \end{array}\right\}\Rightarrow \underline{d=4}\ ;;\ 2c+3d=2\ ;;\ 2c+12=2\ ;;\ 2c=-10\ ;;\ \underline{c=-5}$$

Sustituyendo estos valores, por ejemplo, en las primeras ecuaciones de (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 2a+3b+4c+6d=1 \\ 3a+4b+6c+8d=0 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l} c=-5 \\ d=4 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{r} 2a+3b-20+24=1 \\ 3a+4b-30+32=0 \end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{r} 2a+3b=-3 \\ 3a+4b=-2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} -6a-9b=9 \\ 6a+8b=-4 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ -b=5\ ;;\ \underline{b=-5}\ ;;\ 2a+3b=-3\ ;;\ 2a-15=-3\ ;;\ 2a=12\ ;;\ \underline{a=6}$$

$$\underline{\underline{X=\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}}}$$

II)

Basándonos en el desarrollo del apartado a): $X=A^{-1}\cdot B^{-1}$ (*)

En primer lugar vamos a calcular las inversas de las matrices A y B:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \;;;\; |A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=8-9=\underline{-1=|A|} \;;;\; A^T=A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Adj.\ de\ A^T=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \;;;\; \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \;;;\; |B|=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-3+4=\underline{1=|B|} \;;;\; B^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$Adj.\ de\ B^T=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; \underline{B^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Sustituyendo en (*) y operando:

$$X=A^{-1}\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}=X}}$$

Como era lógico esperar, se ha obtenido el mismo resultado.

****

2º) Dada por $F(x)=\int_0^x (t^2-1)\cdot e^{-t^2}\cdot dt$, definida para todo $x\in R$.

a) Calcular F'(x), estudiar el crecimiento de F(x) y hallar las abscisas de sus máximos y mínimos relativos.

b) Calcular F''(x), estudiar la concavidad y convexidad de F(x) y hallar las abscisas de sus puntos de inflexión.

----

a)

Por el concepto de integral indefinida : $G(x)=\int g(x)\cdot dx \Leftrightarrow G'(x)=f(x)$.

En nuestro caso sería: $F'(x)=\left[(t^2-1)\cdot e^{-t^2}\right]_0^x=\left[(x^2-1)\cdot e^{-x^2}\right]-\left[(0^2-1)\cdot e^0\right]=$

$$=\frac{x^2-1}{e^{x^2}}-(-1\cdot 1)=\underline{\underline{\frac{x^2-1}{e^{x^2}}+1=F'(x)}}. \qquad F'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{e^{x^2}}+1=0 \;;;\; \underline{x=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'(x)>0,\ \forall x\in R \Rightarrow \underline{\underline{F(x)\ es\ creciente\ en\ su\ dominio}}$$

Como consecuencia de lo anterior, F(x) no tiene máximos ni mínimos relativos; no obstante lo vamos a justificar:

$$F''(x)=\frac{2x\cdot e^{x^2}-(x^2-1)\cdot 2x\cdot e^{x^2}}{\left(e^{x^2}\right)^2}=\frac{2x-(x^2-1)\cdot 2x}{e^{x^2}}=\frac{2x(1-x^2+1)}{e^{x^2}}=\underline{\frac{2x(2-x^2)}{e^{x^2}}=F''(x)}$$

$$F''(0)=0 \Rightarrow \underline{F(x)\ no\ tiene\ ni\ máximo\ ni\ mínimo,\ c.q.j.}$$

b)

$$\underline{\underline{F''(x)=\frac{2x(2-x^2)}{e^{x^2}}}} \Rightarrow F''(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=0} \\ \underline{x_2=\sqrt{2}} \\ \underline{x_3=-\sqrt{2}} \end{cases}$$

Para estudiar los intervalos de concavidad y convexidad solamente estudiaremos el numerador de la segunda derivada, ya que el denominador es positivo para cualquier valor real de x.

$$F''(x)=\frac{2x(2-x^2)}{e^{x^2}} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{F''(x)>0 \Rightarrow (-\infty,-\sqrt{2})\cup(0,\sqrt{2}) \Rightarrow (\cup)\Rightarrow Convexa}} \\ \underline{\underline{F''(x)<0 \Rightarrow (-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},\infty) \Rightarrow (\cap)\Rightarrow Cóncava}} \end{cases}$$

$$F(x)=\frac{4x-2x^3}{e^{x^2}} \quad \Rightarrow \quad F'''(x)=\frac{\left(4-6x^2\right)\cdot e^{x^2}-2x\left(2-x^2\right)\cdot 2x\cdot e^{x^2}}{\left(e^{x^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(4-6x^2\right)-2x\left(2-x^2\right)\cdot 2x}{e^{x^2}}=\frac{4-6x^2-8x+4x^3}{e^{x^2}}=\underline{\frac{2\left(2x^3-3x^2-4x+2\right)}{e^{x^2}}=F'''(x)}$$

$$F'''(0)=\frac{4}{1}=4\neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{P.I.\ \ para\ \ x=0}}$$

$$F'''\left(\sqrt{2}\right)=\frac{2\left(4\sqrt{2}-6-4\sqrt{2}+2\right)}{e^2}=\frac{-8}{e^2}\neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{P.I.\ \ para\ \ x=\sqrt{2}}}$$

$$F'''\left(-\sqrt{2}\right)=\frac{2\left(-4\sqrt{2}-6-4\sqrt{2}+2\right)}{e^2}=\frac{-8}{e^2}\neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{P.I.\ \ para\ \ x=-\sqrt{2}}}$$

****

CUESTIONES

1ª) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores del plano con $\left|\vec{u}\right| = \left|\vec{v}\right|$, probar que los vectores $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)$ y $\left(\vec{u} - \vec{v}\right)$ son ortogonales.

Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es cero. Teniendo en cuenta que el producto escalar de vectores cumple las propiedades conmutativa y distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, podemos hacer:

$$\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} - \vec{v}\right) = \left(\vec{u}\right)^2 - \left(\vec{v}\right)^2 = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{u}\right| \cdot \cos 0 - \left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos 0 = \left|\vec{u}\right|^2 - \left|\vec{v}\right|^2 = 0$$

$$\underline{\underline{En\ \ efecto,\ \left(\vec{u} + \vec{v}\right)\ y\ \left(\vec{u} - \vec{v}\right)\ son\ \ ortogonales}}$$

****

2ª) Calcular la distancia entre el plano $\pi_1 \equiv x+y-z-1=0$ y el plano π_2, que es paralelo a π_1 y pasa por el punto A(4, 3, 7).

La distancia entre los planos π_1 y π_2 es la misma que la distancia del punto A al plano π_1:

La distancia de un punto a un plano es $d(P,\ \pi)=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicándola a este caso:

$$d(\pi_1,\ \pi_2)=d(A,\ \pi_1)=\frac{|1\cdot 4+1\cdot 3-1\cdot 7-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{|4+3-7-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}\ u=d(\pi_1,\ \pi_2)}}$$

****

3ª) Calcular $\int \frac{\cos\ x}{sen^3\ x} \cdot dx$.

$$I = \int \frac{\cos\ x}{sen^3\ x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} sen\ x = t \\ \cos\ x \cdot\ dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow I = \int \frac{dt}{t^3} = \frac{t^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2 \cdot t^2} + C =$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{2 \cdot sen^2\ t} + C = I}}$$

****

4ª) Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen de coordenadas y pasa por los focos de la elipse de ecuación: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Se trata de una elipse centrada en los ejes, siendo $\left.\begin{cases} a^2 = 25 \rightarrow \underline{a = 5} \\ \\ b^2 = 9 \rightarrow \underline{b = 1} \end{cases}\right\}$.

La relación fundamental de la elipse es:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = \underline{4 = c}$$

Los focos de la elipse son los puntos F(4, 0) y F'(-4, 0). Si la circunferencia pasa por los focos, su radio es 4, por tanto, la ecuación de la circunferencia pedida es:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x^2 + y^2 - 16 = 0}}$$

****

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) a) Hallar la recta t que corta a las rectas $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} x+2y+2=0 \\ 2y+z-5=0 \end{cases}$ y pasa por el punto P(-2, 0, -7).

b) Calcular la distancia del punto P a la recta r.

----

a)

En primer lugar determinamos un punto y un vector director de cada una de las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow \underline{A(0,\ 2,\ 1)} \ ;; \ \underline{\overrightarrow{u} = (2,\ -3,\ 3)}$$

$$s \equiv \begin{cases} x+2y+2=0 \\ 2y+z-5=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=k} \Rightarrow 2y = 5-k \ ;; \ \underline{y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}k} \ ;; \ x = -2-2y = -2-5+k =$$

$$= \underline{-7+k = x} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -7+k \\ y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}k \\ z = k \end{cases} \Rightarrow \underline{B\left(-7,\ \frac{5}{2},\ 1\right)} \ ;; \ \underline{\overrightarrow{v} = (2,\ -1,\ 2)}$$

En segundo lugar determinamos los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BP}$:

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (-2,\ 0,\ -7) - (0,\ 2,\ 1) = \underline{(-2,\ -2,\ -8) = \overrightarrow{AP}}$$

$$\overrightarrow{BP} = P - B = (-2,\ 0,\ -7) - \left(-7,\ \frac{5}{2},\ 1\right) = \underline{\left(5,\ -\frac{5}{2},\ -8\right) = \overrightarrow{BP}}$$

A continuación vamos a determinar los planos π_1 y π_2 del siguiente modo:

$$\pi_1\left(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{AP}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y & z+7 \\ 2 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 0 \ ;; \ \begin{vmatrix} x+2 & y & z+7 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \ ;;$$

$$-12(x+2) + 3y + 2(z+7) + 3(z+7) - 3(x+2) - 8y = 0 \ ;; \ -15(x+2) - 5y + 5(z+7) = 0 \ ;;$$

$$3(x+2) + y - (z+7) = 0 \ ;; \ 3x+6+y-z-7 = 0 \Rightarrow \underline{\pi_1 \equiv 3x+y-z-1=0}$$

$$\pi_2\left(P;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{BP}\right)\equiv\begin{vmatrix} x+2 & y & z+7 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & -\frac{5}{2} & -8 \end{vmatrix}=0\ ;;$$

$$8(x+2)+10y-5(z+7)+5(z+7)+5(x+2)+16y=0\ ;;\ 13(x+2)+26y=0\ ;;$$

$$(x+2)+2y=0\ ;;\ x+2+2y=0\ \Rightarrow\ \underline{\pi_2\equiv x+2y+2=0}$$

La recta t pedida es la que determinan los planos π_1 y π_2:

$$t\equiv\begin{cases} 3x+y-z-1=0 \\ x+2y+2=0 \end{cases}$$

b)

La distancia de un punto a una recta viene dada por: $d(P,\ r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{u}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|}$, siendo A(0, 2, 1) un punto de r y $\overrightarrow{u}=(2,\ -3,\ 3)$ un vector director de la recta r.

$$d(P,\ r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{u}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -2 & -2 & -8 \\ 2 & -3 & 3 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+3^2}}=\frac{\left|-6i-16j+6k+4k-24i+6j\right|}{\sqrt{4+9+9}}=$$

$$=\frac{\left|-30i-10j+10k\right|}{\sqrt{22}}=\frac{10\cdot\left|-3i-j+k\right|}{\sqrt{22}}\frac{10\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+1^2}}{\sqrt{22}}=\frac{10\sqrt{9+1+1}}{\sqrt{22}}=\frac{10\sqrt{11}}{\sqrt{22}}=$$

$$=\frac{10}{\sqrt{2}}=\underline{\underline{5\sqrt{2}\ unidades=d(P,\ r)}}$$

****

2º) a) Enunciar la Regla de Barrow.

b) Hallar el área del recinto limitado por las parábolas $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ y la recta y = 2x.

----

a)

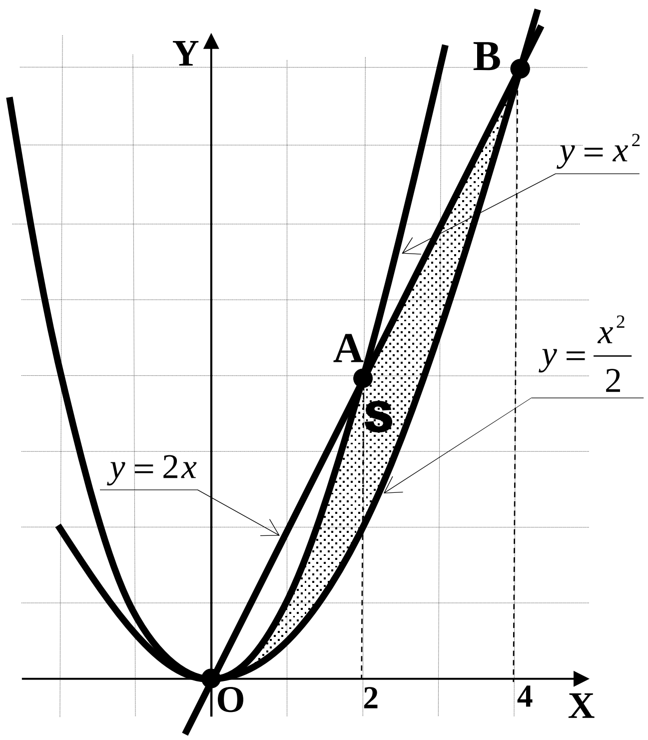
El enunciado de la regle de Barrow es el siguiente:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y F(x) es una función primitiva de f(x) en dicho intervalo, entonces se verifica la siguiente igualdad:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$$

b)

La situación aproximada de la situación es la indicada en la gráfica siguiente:



$$S = \left[\int_0^2 x^2 \cdot dx - \int_0^2 \frac{x^2}{2} \cdot dx\right] + \left[\int_2^4 2x \cdot dx - \int_2^4 \frac{x^2}{2} \cdot dx\right] = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right) \cdot dx + \int_2^4 \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) \cdot dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{x^2}{2} \cdot dx + \int_2^4 \frac{4x - x^2}{2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_2^4 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3} - 0\right) + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(32 - \frac{64}{3}\right) - \left(8 - \frac{8}{3}\right)\right] = \frac{4}{3} + 16 - \frac{32}{3} - 4 + \frac{4}{3} = 12 - \frac{24}{3} = \underline{\underline{4\ u^2 = S}}$$

****

CUESTIONES

1ª) Calcular razonadamente la matriz A sabiendo que se verifica la siguiente igualdad:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Llamando M a la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, resulta: $A \cdot M = 2 \cdot I$ (*)

La matriz inversa de M es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \;;;\; |M| = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \;;;\; M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$Adj\left(M^T\right) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

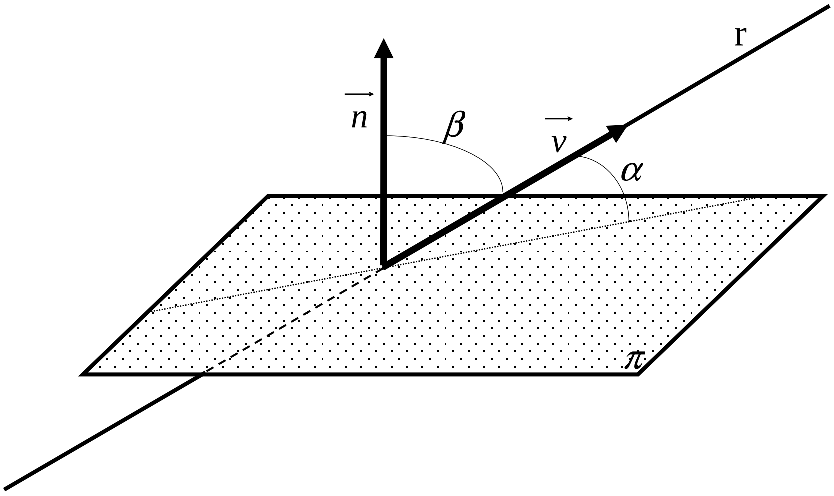
Multiplicando por la derecha en (*) por M^{-1}, queda:

$$A \cdot M \cdot M^{-1} = 2 \cdot I \cdot M^{-1} \;;;\; A \cdot I = 2 \cdot M^{-1} \;;;\; A = 2 \cdot M^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = A}}$$

****

2ª) Calcular el ángulo que forma la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-1}{-1}$ con el plano de ecuación $\pi \equiv 2x - 5y + 7z - 11 = 0$.

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un esquema de la situación:



El ángulo α que forman el plano π y la recta r es el complementario del ángulo que forman un vector $\vec{v}$ director de r y un vector $\vec{n}$, normal al plano π.

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{n}\right| \cdot \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} \qquad (*)$$

Un vector director de r puede ser $\vec{v} = (2,\ 5,\ -1)$ y un vector normal de π puede ser $\vec{n} = (2,\ -5,\ 7)$.

$$\cos\beta = sen\ \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \frac{(2,\ 5,\ -1)\cdot(2,\ -5,\ 7)}{\sqrt{2^2+5^2+(-1)^2} \cdot \sqrt{2^2+(-5)^2+7^2}} = \frac{4-25-7}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{78}} = \frac{-28}{\sqrt{2340}} =$$

$$= 0'5788 \quad \Rightarrow \quad \alpha = arc.\ sen\ 0'5788 = \underline{\underline{35^{\circ}\ \ 22'\ \ 6'' = \alpha}}$$

****

3ª) Dadas las funciones $f(x)=\sqrt[3]{x^2+x+1}$ y $g(x)=L(x+8)$, escribir la función $g\circ f$ y calcular su derivada.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sqrt[3]{x^2+x+1} \\ \\ g(x)=L(x+8) \end{array}\right\} \Rightarrow (g\circ f)(x)=g[f(x)]=L\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}+8\right)=L\left[\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{3}}+8\right]$$

$$\underline{\underline{(g\circ f)(x)=L\left[\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{3}}+8\right]}}$$

$$(g\circ f)'(x)=\frac{\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(2x+1)}{\sqrt[3]{x^2+x+1}+8}=\frac{\frac{2x+1}{\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}}}{\sqrt[3]{x^2+x+1}+8}=\frac{2x+1}{\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}\cdot\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}+8\right)}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{2x+1}{3\left(x^2+x+1+8\sqrt[3]{x^2+x+1}\right)}=(g\circ f)'(x)}}$$

****

4ª) Calcular: $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{e^x}$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \left(Aplicando \ \ la \ \ \mathrm{Re}\,gla \ \ de \ \ L'\,Hopital \right) \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{e^x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2 \cdot e^x \cdot \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\infty} = \underline{\underline{0}}$$

****