PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CATALUÑA

EXTRAORDINARIA – 2022

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

1º) El palo central que sostiene la lona de la carpa de un circo se ubica perpendicularmente sobre el plano de un suelo cuya ecuación es $\pi \equiv x - z = 6$. Sabemos que la cúpula de la carpa (el punto más alto por donde pasa el palo) está en el punto de coordenadas $P(30, 1, 0)$.

a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que contiene el palo.

b) Calcule las coordenadas del punto de contacto del palo con el suelo, y la longitud del palo.

----

a)

La recta r pedida es perpendicular al plano $\pi \equiv x - z = 6$ y contiene al punto $P(30, 1, 0)$.

Un vector normal del plano $\pi \equiv x - z = 6$ es $\vec{n} = (1, 0, -1)$, que también es director de la recta r, por lo cual: $\underline{r \equiv \begin{cases} x = 30 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases}}$.

b)

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - z = 6 \\ r \equiv \begin{cases} x = 30 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (30 + \lambda) - (-\lambda) = 6; \;\; 30 + \lambda + \lambda = 6; \;\; 30 + 2\lambda = 6;$$

$$2\lambda = -24; \;\; \lambda = -12 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 30 - 12 = 18 \\ y = 1 \\ z = -(-12) = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Q(18, 1, 12)}.$$

****

2º) Considere la función $f(x) = \frac{9}{x^2+x-2}$.

a) Discuta el dominio, las posibles asíntotas, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Calcule la ecuación general de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$. Represente en un mismo gráfico la función y la recta tangente.

----

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2 + x - 2 = 0;\ \ x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{D(f)\ \Rightarrow R - \{-2, 1\}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{9}{x^2+x-2} = 0 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = 0\ (eje\ X)}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito; son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = -2, x = 1}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{0\cdot(x^2+x-2)-9\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} = \frac{-9\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}.$$

Por ser $(x^2 + x - 2)^2 > 0, \forall x \in D(f)$, el signo de la primera derivada es el de su numerador.

$-9 \cdot (2x + 1) = 0;\ \ 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

$$Para\ x < -\frac{1}{2} \Rightarrow\ f'(x) > 0\ \Rightarrow\ \underline{Crecimiento: (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\frac{1}{2}\right)}.$$

$$Para\ x > -\frac{1}{2} \Rightarrow\ f'(x) < 0\ \Rightarrow\ \underline{Decrecimiento: \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = \frac{-18x-9}{(x^2+x-2)^2}. \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

$$f''(x) = \frac{-18\cdot(x^2+x-2)^2+9\cdot(2x+1)\cdot[2\cdot(x^2+x-2)\cdot(2x+1)]}{(x^2+x-2)^4} = \frac{-18\cdot(x^2+x-2)+18\cdot(2x+1)^2}{(x^2+x-2)^3} =$$

$$= \frac{-18\cdot(x^2+x-2-4x^2-8x-1)}{(x^2+x-2)^3} = \frac{-18\cdot(-3x^2-7x-3)}{(x^2+x-2)^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{18\cdot(3x^2+7x+3)}{(x^2+x-2)^3}.$$

$$f''\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{18\cdot\left[3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3\right]}{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-2\right]^3} = \frac{18\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{7}{2}+3\right)}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2\right)^3} = \frac{18\cdot\frac{3-14+12}{4}}{\left(\frac{1-2-8}{4}\right)^3} = \frac{\frac{9}{2}}{\left(-\frac{9}{4}\right)^3} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -\frac{1}{2}.$$

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{9}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-2} = \frac{9}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2} = \frac{9}{\frac{1-2-8}{4}} = \frac{9}{\frac{-9}{4}} = -4 \Rightarrow \underline{Máximo\colon A\left(-\frac{1}{2}, -4\right)}.$$

$b)$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{-18x-9}{(x^2+x-2)^2}. \qquad Para\ x = 4 \Rightarrow m = f'(4) = \frac{-81}{18^2} = -\frac{1}{4}.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(4) = \frac{9}{4^2+4-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow P\left(4, \frac{1}{2}\right)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P\left(4, \frac{1}{2}\right)$ con $m = -\frac{1}{4}$:

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\cdot(x-4);\ \ 4y - 2 = -x + 4.$$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ pedida\ es\ t \equiv x + 4y - 6 = 0.}$$

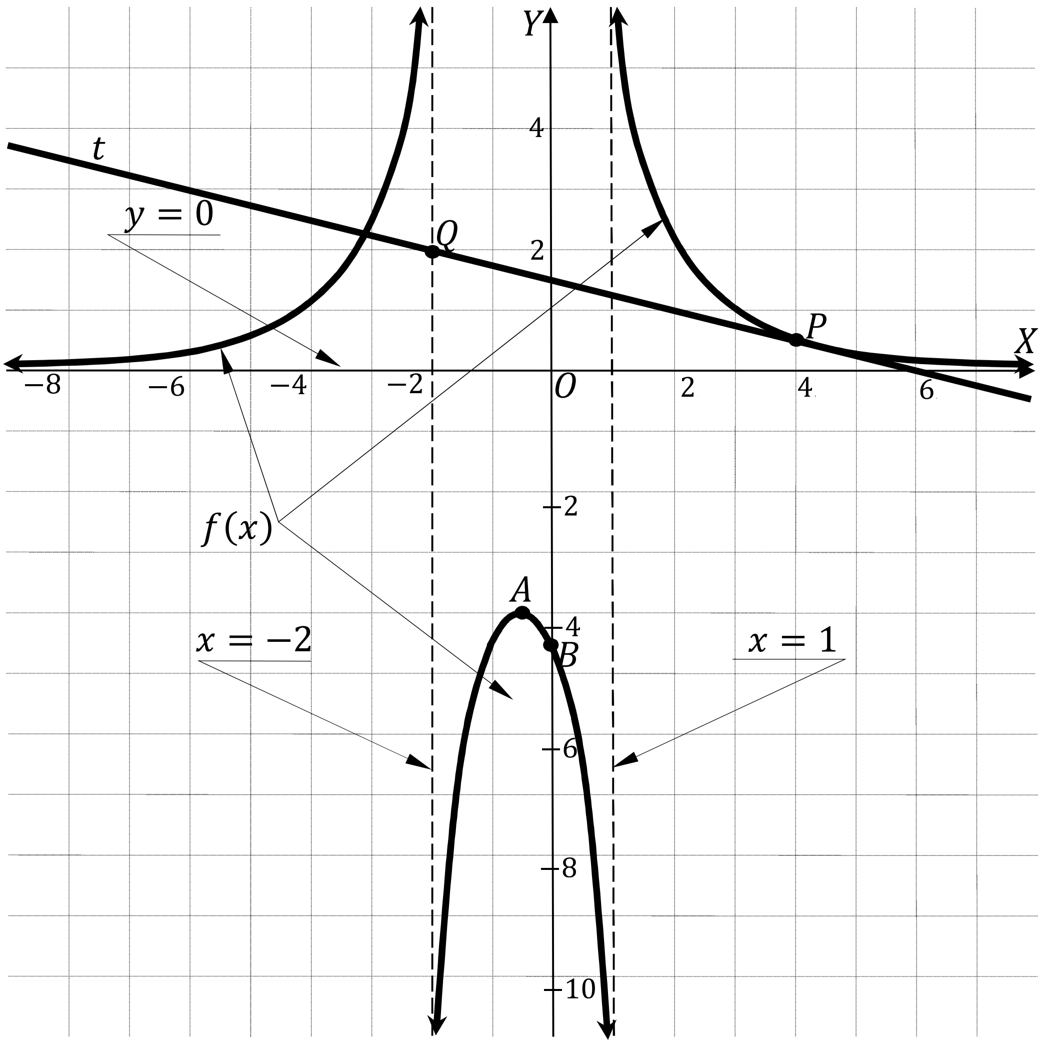
Para facilitar la representación gráfica de la situación se determinan los puntos de corte con los ejes, que son los siguientes:

$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{9}{x^2+x-2} = 0 \Rightarrow x \notin R \Rightarrow \underline{No\ corta\ al\ eje\ X.}$

$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{9}{0+0-2} = -\frac{9}{2} \Rightarrow B\left(0, -\frac{9}{2}\right).$

Para la representación gráfica de la tangente se tiene en cuenta que contiene al punto $Q(-2, 2)$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura siguiente.



****

3º) Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & a & 3\\ 2a & 5 & 3a\\ 7 & 4a & 9\end{pmatrix}$, que depende del parámetro a.

a) Calcule el rango de la matriz A para los diferentes valores del parámetro a.

b) Si $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

----

a)

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & a & 3\\ 2a & 5 & 3a\\ 7 & 4a & 9\end{vmatrix}=45+24a^2+21a^2-105-12a^2-18a^2=$$

$$=-65+15a^2=0;\ -13+3a^2=0;\ \ 3a^2=13\Rightarrow a=\pm\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{39}}{3}.$$

Se calcula el rango por el método de Gauss:

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 3\\ 2a & 5 & 3a\\ 7 & 4a & 9\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_2\to F_2-2a\cdot F_1\\ F_3\to F_3-7\cdot F_1\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & a & 3\\ 0 & 5-2a^2 & 3a-6a\\ 0 & 4a-7a & 9-21\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & a & 3\\ 0 & 5-2a^2 & -3a\\ 0 & -3a & -12\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{F_3\to-\tfrac{1}{3}F_3\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & a & 3\\ 0 & 5-2a^2 & -3a\\ 0 & a & 4\end{pmatrix}\Rightarrow\{F_2\leftrightarrow F_3\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & a & 3\\ 0 & a & 4\\ 0 & 5-2a^2 & -3a\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{F_3\to F_3-\frac{5-2a^2}{a}\cdot F_2\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & a & 3\\ 0 & a & 4\\ 0 & 0 & \frac{5a^2-20}{a}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{5a^2-20}{a}=0;\ \ 5a^2-20=0;\ \ a^2-4=0\Rightarrow a_1=-2, a_2=2.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix}a\neq-2\\ a\neq 2\end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ A=3.}$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix}a=-2\\ a=2\end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ A=2.}$$

b)

De la ecuación matricial: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ se deduce el sistema de ecuaciones lineales homogéneo: $\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=0 \\ 4x+5y+6z=0 \\ 7x+8y+9z=0 \end{array}\right\}$, equivalente al sistema que resulta de restar a cada ecuación la anterior: $\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=0 \\ 3x+3y+3z=0 \\ 3x+3y+3z=0 \end{array}\right\}$, que a su vez, es equivalente al sistema: $\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\}$.

Para su resolución se parametriza, por ejemplo, $z=\lambda$;

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=-3\lambda \\ x+y=-\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x+2y=-3\lambda \\ -x-y=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow y=-2\lambda. \;\; x=-y-\lambda=2\lambda-\lambda \Rightarrow x=\lambda.$$

$$\underline{Solución: x=\lambda; \;\; y=-2\lambda; \;\; z=\lambda, \forall\lambda \in R.}$$

****

4º) a) Considere la función $f(x)=\begin{cases} Lx \;\; si \;\; \in (0,e) \\ ax+b \;\; si \;\; x \in [e,4) \end{cases}$, siendo $a \; y \; b$ números reales. Halla los valores de $a \; y \; b$ tal que la función sea continua y derivable en el intervalo $(0,4)$.

b) Calcule la función $g'(x)=\frac{x^3}{9x^4+1}$ y que pasa por el punto $P(0,-1)$.

----

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en $(0,4)$, excepto para $x=e$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a \; y \; b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para \; x=e \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to e^-} f(x) = \lim_{x\to e} Lx = 1 \\ \lim_{x\to e^+} f(x) = \lim_{x\to e}(ax+b) = ae+b = f(e) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to e^-} f(x) = \lim_{x\to e^+} f(x) = f(e) \Rightarrow ae+b=1. \quad (*)$$

La función $f(x)$ es derivable en $(0,4)$, excepto para $x=e$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de $a \; y \; b$.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} \;\; si \;\; \in (0,e) \\ a \;\; si \;\; x \in [e,4) \end{cases} \Rightarrow x=e \; \Rightarrow f'(e)=\begin{cases} \frac{1}{e} \;\; si \;\; \in (0,e) \\ a \;\; si \;\; x \in [e,4) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \; f'(e^-)=f'(e^+) \Rightarrow \frac{1}{e}=a \Rightarrow ae=1.$ Sustituyendo en (*): $b=0.$

$$\underline{La \; función \; f(x) \; es \; continua \; y \; derivable \; en \; (0,4) \; para \; a=\frac{1}{e} \; y \; b=0.}$$

b)

$$g'(x)=\frac{x^3}{9x^4+1} \Rightarrow g(x)=\int \frac{x^3}{9x^4+1}\cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 9x^4+1=t \\ 36x^3\cdot dx = dt \\ x^3\cdot dx = \frac{1}{36}\cdot dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{36}\cdot\int\frac{1}{t}\cdot dt =$$

$$= \frac{1}{36}\cdot Lt + C \Rightarrow g(x)=\frac{1}{36}\cdot L(9x^4+1)+C.$$

$$g(0) = -1 \Rightarrow \frac{1}{36} \cdot L(9 \cdot 0^4 + 1) + C = 1;\ \ \frac{1}{36} \cdot L1 + C = 1;\ \ \frac{1}{36} \cdot 0 + C = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 1 \Rightarrow \underline{g(x) = \frac{1}{36} \cdot L(9x^4 + 1) + C}.$$

****

5º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Calcule los valores del parámetro a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Para el caso de $a = 3$, resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B - 3I$, siendo B la matriz $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a(a+1)(a+3) + a(a-1)(2a+1) + 2a(a+3) = 0;$$

$$a \cdot [(-a^2 - 4a - 3) + (2a^2 - a - 1) + (2a + 6)] = 0;\ \ a(a^2 - 3a + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 0;\ \ a^2 - 3a + 2 = 0;\ \ a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow a_2 = 1,\ a_3 = 2.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{0, 1, 2\}}.$$

b)

$$B - 3I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B - 3I = I.$$

$$A \cdot X = B - 3I = I;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot I;\ \ I \cdot X = A^{-1} \Rightarrow \underline{X = A^{-1}}.$$

Para $a = 3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. $\quad |A| = -72 + 42 + 36 \Rightarrow |A| = 6.$

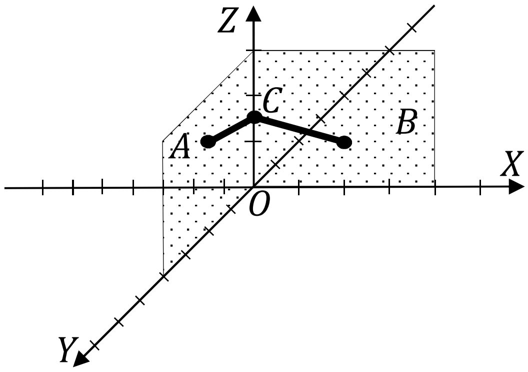
$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}. \quad Adj.\,de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ -30 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ -30 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}}{6} \Rightarrow \underline{X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & -3 & -1 \\ -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}}.$$

****

6º) La imagen adjunta muestra dos paredes perpendiculares de una sala representadas en unos ejes de coordenadas, de manera que una parte es el plano $y = 0$ y la otra parte es el plano $x = 0$. En el punto $A(2, 0, 2)$ queremos colgar un altavoz que debe estar conectado a un equipo de sonido, que está situado en la otra pared, en el punto $B(0, 2, 1)$. La conexión entre A y B la haremos mediante un cable que pase por el punto $C(0, 0, h)$, situado en la recta vertical de intersección de las dos paredes. Debido a que la calidad del sonido depende, entre otros factores, de la longitud del cable que une los dos aparatos, queremos realizar una instalación con el mínimo de cable posible.



a) Compruebe que la longitud total del cable necesario, en función de la altura h por donde debe pasar el cable en el eje vertical OZ, viene dado por la siguiente expresión: $L(h) = \sqrt{h^2 - 4h + 8} + \sqrt{h^2 - 2h + 5}$.

b) Calcule las coordenadas del punto C por donde ha de pasar el cable para que la longitud del cable sea mínima. Calcule la longitud mínima del cable.

----

a)

$$L(h) = \overline{AC} + \overline{CB} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{AC} = \sqrt{(0-2)^2 + (0-0)^2 + (2-h)^2} \\ \overline{CB} = \sqrt{(0-0)^2 + (2-0)^2 + (1-h)^2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4 + 4 - 4h + h^2} + \sqrt{4 + 1 - 2h + h^2} = \sqrt{h^2 - 4h + 8} + \sqrt{h^2 - 2h + 5}.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ L(h) = \sqrt{h^2 - 4h + 8} + \sqrt{h^2 - 2h + 5}}.$$

b)

Para que la longitud sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$L'(h) = \frac{2h-4}{2\cdot\sqrt{h^2-4h+8}} + \frac{2h-2}{2\cdot\sqrt{h^2-2h+5}} = \frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}} + \frac{h-1}{\sqrt{h^2-2h+5}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}} = \frac{-h+1}{\sqrt{h^2-2h+5}}; \quad \frac{h^2-4h+4}{h^2-4h+8} = \frac{h^2-2h+1}{h^2-2h+5};$$

$$(h^2 - 4h + 4)(h^2 - 2h + 5) = (h^2 - 4h + 8)(h^2 - 2h + 1);$$

$$h^4 - 2h^3 + 5h^2 - 4h^3 + 8h^2 - 20h + 4h^2 - 8h + 20 =$$

$$= h^4 - 2h^3 + h^2 - 4h^3 + 8h^2 - 4h + 8h^2 - 16h + 8;$$

$$-20h-8h+20=-4h-16h+8;\ -28h+20=-20h+8;\ \ 12=8h \Rightarrow h=\frac{3}{2}.$$

La longitud del cable es mínima cuando $h=\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{C\left(0,0,\frac{3}{2}\right)}$.

Para $h=\frac{3}{2} \Rightarrow L\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\cdot\frac{3}{2}+8}+\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\frac{3}{2}+5}=$

$$=\sqrt{\frac{9}{4}-6+8}+\sqrt{\frac{9}{4}-3+5}=\sqrt{\frac{9}{4}+2}+\sqrt{\frac{9}{4}+2}=2\cdot\sqrt{\frac{9+4}{4}}=\sqrt{13}.$$

$\underline{\textit{La longtidud mínima del cable es } L=\sqrt{13}\ m \cong 3{,}61\ m.}$

****