PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2013

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las siguientes seis cuestiones. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Puede utilizar calculadora, pero no pueden utilizarse calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

CUESTIONES

1ª) Sea $V=\{(-1,\ 1,\ 1),\ (-2,\ -1,\ 0),\ (1,\ 2,\ a)\}$ un conjunto de vectores en R^3.

a) Encuentre el valor o los valores de α para que V sea linealmente dependiente.

b) Cuando α = 4, exprese el vector $\vec{v}=(3,\ 9,\ 14)$ como combinación lineal de los vectores de V.

---

a)

Para que los vectores de V sean linealmente dependientes es condición necesaria que sea nulo el valor del determinante que forman, lo que significa que el rango que tengan sea menor que tres.

$$Rango\ V\ \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a-4+1+2a = 3a-3 = 3(a-1) = 0\ \Rightarrow\ \underline{a=1}\,.$$

Los vectores de V sean linealmente dependientes únicamente para α = 1.

b)

$$\vec{v}=(3,\ 9,\ 14)=x\cdot(-1,\ 1,\ 1)+y\cdot(-2,\ -1,\ 0)+z\cdot(1,\ 2,\ 4)\Rightarrow \begin{cases} -x-2y+z=3 \\ x-y+2z=9 \\ x+4z=14 \end{cases}.$$

Sumando la primera ecuación a las otras dos resulta el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -3y+3z=12 \\ -2y+5z=17 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 6y-6z=-24 \\ -6y+15z=51 \end{array}\right\} \Rightarrow 9z=27 \;;;\; \underline{z=3} \;;;\; -y+z=4 \;;;\; -y+3=4 \;;;\; \underline{y=-1}\,.$$

$$-x-2y+z=3 \;;;\; -x+2+3=3 \;;;\; \underline{x=2}\,.$$

$$\underline{\underline{\vec{v}=(3,\ 9,\ 14)=2\cdot(-1,\ 1,\ 1)-(-2,\ -1,\ 0)+3\cdot(1,\ 2,\ 4)}}$$

****

2ª) De la función polinómica $P(x)=x^3+ax^2+bx+2$ sabemos que tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = -3 y que la integral definida en el intervalo [0, 1] vale -5/4. Calcule el valor de los parámetros α y b.

Para que una función tenga un extremo relativo para un valor determinado es condición necesaria que se anule su derivada para ese valor.

$$P'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow P'(-3)=0 \Rightarrow 3\cdot(-3)^2+2a\cdot(-3)+b=0 \;;;\; 27-6a+b=0 \;;;$$

$\underline{6a-b=27}$. (1)

$$\int_0^1 P(x)\cdot dx=-\frac{5}{4} \Rightarrow \int_0^1 \left(x^3+ax^2+bx+2\right)\cdot dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+2x\right]_0^1=-\frac{5}{4} \;;;$$

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+2\right)-0=-\frac{5}{4} \;;;\; \frac{3+4a+6b+24}{12}=-\frac{5}{4} \;;;\; \frac{4a+6b+27}{3}=-5 \;;;\; 4a+6b+27=-15 \;;;$$

$4a+6b=-42 \;;;\; \underline{2a+3b=-21}$. (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{matrix}6a-b=27\\2a+3b=-21\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}18a-3b=81\\2a+3b=-21\end{matrix}\right\} \Rightarrow 20a=60 \;;;\; \underline{\underline{a=3}}.$$

$$\left.\begin{matrix}6a-b=27\\2a+3b=-21\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}-6a+b=-27\\6a+9b=-63\end{matrix}\right\} \Rightarrow 10b=-90 \;;;\; \underline{\underline{b=-9}}.$$

****

3ª) Dados el plano $\pi \equiv x+2y-z=3$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+m}{4}$:

a) Compruebe que el vector característico (o normal) de π y el vector director de r son perpendiculares.

b) Estudie la posición relativa de π y r en función del parámetro m.

---

a)

El vector normal del plano π es $\vec{n} = (1,\ 2,\ -1)$ y el vector director de la recta r es $\vec{v_r} = (2,\ 1,\ 4)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\vec{n} \cdot \vec{v_r} = (1,\ 2,\ -1) \cdot (2,\ 1,\ 4) = 2+2-4 = \underline{0}$$

El vector normal de π y el vector director de r son perpendiculares, c.q.c.

b)

Según que la recta r y el plano π tengan infinitos puntos en común, un punto en común o ningún punto en común, la recta está contenida en el plano, son secantes o son paralelos, respectivamente.

La expresión de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+m}{4}$ por unas ecuaciones continuas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x-1=2y \\ 4y=z+m \end{cases}$, o mejor: $r \equiv \begin{cases} x-2y=1 \\ 4y-z=m \end{cases}$.

El plano π y la recta r determinan el sistema: $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ x-2y=1 \\ 4y-z=m \end{cases}$.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2-4+2=0 \Rightarrow \underline{Rango\ A=2}.$$

La matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & m \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de ampliada en función de m es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & m \end{vmatrix} = -2m + 12 - 4 - 2m = 8 - 4m = 4(2-m) \\ \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & m \end{vmatrix} = -3 + 1 + m = m - 2 \\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & m \end{vmatrix} = 6 - 4 + 2 - 2m = 4 - 2m = 2(2-m) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{Para\ \ m = 2\ \Rightarrow\ Rango\ A = Rango\ A' = 2 < n^{o}\ inc\acute{o}gnitas\ \Rightarrow\ Compatible\ in\det er\min ado}$$

$$\underline{Para\ \ m \neq 2\ \Rightarrow\ Rango\ \ A = 2\ ;;\ Rango\ \ A' = 3\ \Rightarrow\ Incompatible}$$

Para m = 2 el plano π contiene a la recta r.

Para m ≠ 2 el plano π y la recta r son secantes (perpendiculares según apartado a).

****

4ª) Sean las matrices $A=\begin{bmatrix}2 & a & 1\\ 1 & b & 4\\ 3 & c & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & b & 8\\ 1 & c & 3\\ 4 & a & 3\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}2 & 4 & 7\\ -1 & 5 & 5\\ -b & -a & -2\end{bmatrix}$, donde α, b y c son parámetros reales. Calcule el valor de estos parámetros para que ninguna de las tres matrices tenga inversa.

Una matriz no tiene inversa cuando su determinante es cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & a & 1\\ 1 & b & 4\\ 3 & c & 5\end{vmatrix}=10b+c+12a-3b-5a-8c=7a+7b-7c=0\ ;;\ \underline{a+b-c=0}\,. \qquad (1)$$

$$|B|=\begin{vmatrix}5 & b & 8\\ 1 & c & 3\\ 4 & a & 3\end{vmatrix}=15c+8a+12b-32c-15a-3b=\underline{-7a+9b-17c=0}\,. \qquad (2)$$

$$|C|=\begin{vmatrix}2 & 4 & 7\\ -1 & 5 & 5\\ -b & -a & -2\end{vmatrix}=-20+7a-20b+35b+10a-8=\underline{17a+15b=28}\,. \qquad (3)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$$\begin{cases}a+b-c=0\\ -7a+9b-17c=0\\ 17a+15b=28\end{cases}.$$

De las ecuaciones (1) y (2): $a+b=\dfrac{-7a+9b}{17}$;; $17a+17b=-7a+9b$;; $24a+8b=0$;;

$3a+b=0$;; $\underline{b=-3a}$. Sustituyendo este valor en la ecuación $17a+15b=28$:

$17a+15\cdot(-3a)=28$;; $17a-45a=28$;; $-28a=28$;; $\underline{a=-1}$;; $\underline{b=3}$;; $\underline{c=2}$.

Las matrices A, B y C no tienen inversas para α = -1, b = 3 y c = 2.

****

5ª) Dados el plano $\pi \equiv 2x - y + 3z - 8 = 0$ y el punto P(6, -3, 7):

a) Encuentre la ecuación continua de la recta que pasa por P y es perpendicular a π.

b) Encuentre el punto del plano π que está más cerca del punto P.

---

a)

El vector normal del plano π es $\vec{n} = (2,\ -1,\ 3)$, que también es director de la recta r pedida.

La expresión de r dada por una ecuación continua es la siguiente:

$$\underline{\underline{r \equiv \frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-7}{3}}}$$

b)

El punto del plano π que está más cerca del punto P es el punto Q, intersección de la recta r con el plano π.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 6 + 2\lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = 7 + 3\lambda \end{cases}$.

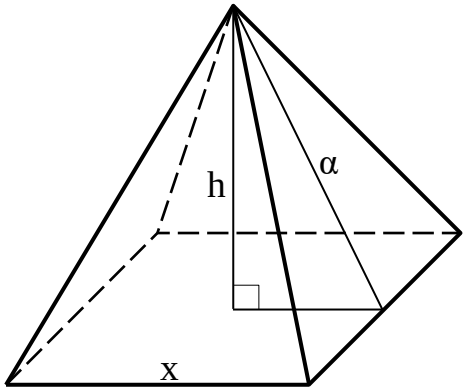
$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + 3z - 8 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 6 + 2\lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = 7 + 3\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2\cdot(6 + 2\lambda) - (-3 - \lambda) + 3\cdot(7 + 3\lambda) - 8 = 0\ ;;$$

$$12 + 4\lambda + 3 + \lambda + 21 + 9\lambda - 8 = 0\ ;;\ 28 + 14\lambda = 0\ ;;\ 2 + \lambda = 0\ ;;\ \underline{\lambda = -2} \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 6 - 4 = 2 \\ y = -3 + 2 = -1 \\ z = 7 - 6 = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{\underline{Q(2,\ -1,\ 1)}}$$

****

6ª) Se quiere construir una tienda en forma de pirámide regular de base cuadrada. Disponemos de 300 m^2 de tela para la fabricación de las cuatro caras de la tienda (se supone que en la elaboración de las caras no se pierde tela). Designamos por x la longitud de un lado de la base de la tienda.



a) Sabiendo que el volumen de una pirámide es igual a un tercio del producto del área de la base por la altura, comprueba, en este caso: $V(x)=\dfrac{x\cdot\sqrt{9\cdot10^4-x^4}}{6}$.

b) Determine el valor de x para que el volumen sea lo mayor posible (no es necesario que compruebe que el valor obtenido corresponde realmente a un máximo).

---

a)

La superficie de una cara lateral es $S_{L1}=\dfrac{a\cdot x}{2}$. (1)

La superficie lateral de la pirámide es $S_L=4\cdot S_{L1}=4\cdot\dfrac{a\cdot x}{2}=2\cdot a\cdot x=300\Rightarrow \underline{a=\dfrac{150}{x}}$.

Del triángulo rectángulo de la figura se deduce aplicando el teorema de Pitágoras:

$$a^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+h^2=\frac{x^2}{4}+h^2\ ;;\ \left(\frac{150}{x}\right)^2=\frac{x^2}{4}+h^2\ ;;\ \frac{22500}{x^2}=\frac{x^2}{4}+h^2\ ;;\ h^2=\frac{22500}{x^2}-\frac{x^2}{4}=$$

$$=\frac{90000-x^4}{4x^2}=h^2\ \Rightarrow\ h=\sqrt{\frac{90000-x^4}{4x^2}}=\underline{\frac{\sqrt{9\cdot10^4-x^4}}{2x}}.$$

$$V(x)=\frac{x^2\cdot h}{3}=\frac{x^2\cdot\dfrac{\sqrt{9\cdot10^4-x^4}}{2x}}{3}=\underline{\underline{\frac{x\cdot\sqrt{9\cdot10^4-x^4}}{6}=V(x)}},\ \underline{\text{como queríamos comprobar}}.$$

b)

El volumen el máximo cuando su primera derivada es cero:

$$V(x)=\frac{x\cdot\sqrt{9\cdot10^4-x^4}}{6}=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{9\cdot10^4\cdot x^2-x^6}\ \Rightarrow\ V'(x)=\frac{1}{6}\cdot\frac{18\cdot10^4\cdot x-6x^5}{2\cdot\sqrt{9\cdot10^4\cdot x^2-x^6}}=$$

$$=\frac{3\cdot10^4\cdot x-x^5}{2x\cdot\sqrt{9\cdot10^4-x^4}}=\frac{3\cdot10^4-x^4}{2\cdot\sqrt{9\cdot10^4-x^4}}=0\ \Rightarrow\ 3\cdot10^4-x^4=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{x=10\cdot\sqrt[4]{3}\ m\cong13'16\ m}}.$$

****