PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

JUNIO – 2012

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las siguientes seis cuestiones. En las respuestas, explique siempre qué es lo que quiere hacer y por qué.

Puede utilizar calculadora, pero no pueden utilizarse calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1ª) Diga para que valores de m los planos $\pi_1 \equiv x - y + mz = 1$, $\pi_2 \equiv x - y + z = m$ y $\pi_3 \equiv my + 2z = 3$ tienen como intersección una recta.

Las matrices de coeficientes y ampliada que determinan los tres planos dados son $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & m & 2 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 1 & m \\ 0 & m & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Los rangos de M y M’ en función de m son los siguientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = -2 + m^2 - m + 2 = 0 \;;;\; m^2 - m = 0 \;;;\; m(m-1) = 0 \Rightarrow \underline{m_1 = 0} \;;;\; \underline{m_2 = 1}.$$

Para m = 0 es $M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ cuyo rango, teniendo en cuenta que $C_1 = -C_2$ es el siguiente: $\{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0 \Rightarrow$ Rango M’ = 3.

Como no hay planos paralelos, los planos se cortan determinando tres rectas.

Para m = 1 es $M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, cuyo rango es dos, por tener dos filas iguales (que son dos planos coincidentes), por lo tanto:

Para m = 1 hay dos planos coincidentes y secantes al tercero determinando una recta.

****

2ª) Dadas la recta $y = 3x + b$ y la parábola $y = x^2$:

a) Calcule los puntos en que la tangente a la parábola es paralela a la recta dada.

b) Calcule el valor del parámetro b para que la recta sea tangente a la parábola.

----

a)

La pendiente a una curva en un punto es el valor de la derivada de la curva en ese punto. La pendiente de la recta dada es m = 3.

$$y' = 2x = 3 \Rightarrow \underline{x = \frac{3}{2}}.$$

$$y\left(\tfrac{2}{3}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$ Existe un solo punto de tangencia que es: $\underline{\underline{P\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)}}$.

b)

Para que la recta $y = 3x + b$ sea tangente a la parábola $y = x^2$ es necesario que pase por el punto de tangencia, por lo cual tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x + b \\ P\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{9}{4} = 3 \cdot \frac{3}{2} + b \;;;\; 9 = 18 + 4b \;;;\; 4b = -9 \;;;\; \underline{\underline{b = -\frac{9}{4}}}.$$

****

3ª) Dado el plano $\pi \equiv x - y + 2z - 5 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}$:

a) Calcule el punto de intersección del plano y la recta.

b) Encuentre la ecuación continua de la recta s contenida en el plano π, que es perpendicular a la recta r y corta a la recta r.

----

a)

El punto de intersección del plano y la recta es la solución del sistema que forman, que es: $\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}$. Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{5 - 10 - 20 + 5}{1 - 2 - 2 - 4 + 1 + 1} = \frac{-20}{-5} = \underline{4 = x}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{20 + 10 - 10 - 5}{-5} = \frac{15}{-5} = \underline{-3 = y}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{10 - 5 - 10 + 10}{-5} = \frac{5}{-5} = \underline{-1 = z}.$$

<u>El punto de corte es P(4, -3, -1).</u>

b)

Un vector director de la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial del los vectores normales de los planos que lo determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (1,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (2,\ -1,\ 1)$.

$$\overrightarrow{v'_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i + 2j - k - 2k + i - j = 2i + j - 3k \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (2,\ 1,\ -3).$$

El haz de planos α perpendiculares a r tiene como vector normal al vector director de la recta r; su expresión general es $2x+y-3z+D=0$.

De todos los infinitos planos del haz α, el plano β que contiene al punto P es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-3z+D=0 \\ P(4,\ -3,\ -1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 4-3-3\cdot(-1)+D=0\ ;;\ 8-3+3+D=0\ ;;\ \underline{D=-8}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{\beta \equiv 2x+y-3z-8=0}.$$

La recta s pedida es la intersección de los planos π y β: $s\equiv\begin{cases} x-y+2z-5=0 \\ 2x+y-3z-8=0 \end{cases}$. La expresión de s por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$s\equiv\begin{cases} x-y+2z-5=0 \\ 2x+y-3z-8=0 \end{cases} \Rightarrow\ \underline{z=\lambda}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{r} x-y=5-2\lambda \\ 2x+y=8+3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=13+\lambda\ ;;\ \underline{x=\frac{13}{3}+\frac{1}{3}\lambda}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x-y=5-2\lambda\ ;;\ y=x-5+2\lambda=\frac{13}{3}+\frac{1}{3}\lambda-5+2\lambda=\underline{-\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\lambda=y}\ \Rightarrow\ \underline{s\equiv\begin{cases} x=\frac{13}{3}+\frac{1}{3}\lambda \\ y=-\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{x-\frac{13}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{y+\frac{2}{3}}{\frac{7}{3}}=\frac{z}{1}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{s\equiv\frac{3x-13}{1}=\frac{2y+2}{7}=\frac{z}{1}}}.$$

Otra forma de resolver el apartado es la siguiente:

Tres puntos del plano $\pi\equiv x-y+2z-5=0$ son A(0, -5, 0), B(5, 0, 0) y C(3, 0, 1), y estos puntos determinan los vectores $\overrightarrow{AB}=(5,\ 5,\ 0)\equiv(1,\ 1,\ 0)$ y $\overrightarrow{AC}=(3,\ 5,\ 1)$, que son directores del plano π.

La expresión de π por unas ecuaciones paramétricas es $\pi\equiv\begin{cases} x=\lambda+3\mu \\ y=-5+\lambda+5\mu \\ z=\mu \end{cases}$.

Un punto genérico de π es $Q(\lambda+3\mu,\ -5+\lambda+5\mu,\ \mu)$.

Los puntos P y Q determinan el vector $\overrightarrow{PQ}=(-4+\lambda+3\mu,\ -2+\lambda+5\mu,\ 1+\mu)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}=(2,\ 1,\ -3)$ y $\overrightarrow{PQ}=(-4+\lambda+3\mu,\ -2+\lambda+5\mu,\ 1+\mu)$ son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{PQ} = (2,\ 1,\ -3) \cdot (-4+\lambda+3\mu,\ -2+\lambda+5\mu,\ 1+\mu) = -8+2\lambda+6\mu-2+\lambda+5\mu-3-3\mu =$$

$= -13+3\lambda+8\mu = 0 \Rightarrow$ Por ejemplo: $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \mu = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1+6 = 5 \\ y = -5-1+10 = 4 \\ z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{Q(5,\ 4,\ 2)}$.

$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{PQ} = (5,\ 4,\ 2) - (4,\ -3,\ -1) = \underline{(1,\ 7,\ 3)}$.

Teniendo en cuenta que la recta s contiene al punto P(4, -3, -1), su expresión por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\underline{\underline{s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{7} = \frac{z+1}{3}}}$$

****

4ª) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$:

a) Compruebe que se cumple la igualdad $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

b) ¿Es cierta la igualdad anterior para cualquier par de matrices cuadradas A y B del mismo orden? Responder razonadamente utilizando las propiedades generales de las operaciones con matrices, sin utilizar matrices A y B concretas.

----

a)

$$A+B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\underline{4I=A+B}.$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}=\underline{A-B}.$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9-2 & 6+2 \\ -3-1 & -2+1 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}=A^2}.$$

$$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-2 & -2-6 \\ 1+3 & -2+9 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}=B^2}.$$

$$(A+B)(A-B)=4I\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}=(A+B)(A-B)}.$$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}=A^2-B^2}.$$

<u>Como hemos comprobado, (A+B) · (A – B) = $A^2 – B^2$.</u>

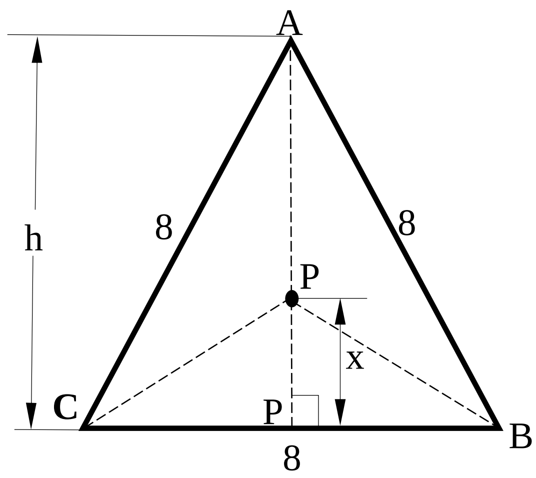
b)

$$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2.$$

<u>Teniendo en cuenta que el producto de matrices, en general, no tiene la propiedad conmutativa, la igualdad dada no se cumple generalmente</u>.

****

5ª) Un triángulo equilátero de vértices A, B y C tiene un lado de 8 cms. Sitúe un punto P sobre una de las alturas del triángulo, a una distancia x de la base correspondiente:



a) Calcule la altura del triángulo de vértices A, B y C.

b) Indique la distancia del punto P a cada uno de los vértices (en función de x).

c) Determine el valor de x para que la suma de los cuadrados de las distancias del punto P a cada uno de los tres vértices sea mínima.

----

a)

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo APB:

$$8^2 = h^2 + 4^2 \;\;;;\;\; h^2 = 64 - 16 = 48 \;\;;;\;\; h = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \underline{\underline{4\sqrt{3}\ cms = h}}.$$

b)

$$\overline{AP} = h - x = \underline{\underline{4\sqrt{3} - x = \overline{AP}}} \;\;;;\;\; \overline{BP}^2 = \overline{CP}^2 = x^2 + 4^2 = x^2 + 16 \;\;;;\;\; \underline{\underline{\overline{BP} = \overline{CP} = \sqrt{x^2+16}}}.$$

c)

$$S = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 = \left(4\sqrt{3} - x\right)^2 + 2 \cdot \left(x^2 + 16\right) = 48 - 8\sqrt{3}x + x^2 + 2x^2 + 32 = \underline{3x^2 - 8\sqrt{3}x + 90}.$$

Para que S sea mínima es necesario que se anule su derivada y, para los valores que la anulan, sea positiva la segunda derivada.

$$S' = 6x - 8\sqrt{3} = 0 \;\;;;\;\; x = \frac{8\sqrt{3}}{6} = \underline{\frac{4\sqrt{3}}{3}\ cms = x = \frac{h}{2}}.$$

$$S'' = 6 > 0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ \ para\ \ x = \frac{4\sqrt{3}}{3}}.$$

<u>El valor de x pedido es la mitad de la altura.</u>

****

6ª) Dados los puntos P(1, 0, 0), Q(0, 2, 0), R(0, 0, 3) y S(1, 2, 3):

a) Calcule la ecuación cartesiana (es decir, de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) del plano que contenga a los puntos P, Q y R.

b) Compruebe si los cuatro puntos son coplanarios (es decir, si los cuatro puntos están contenidos en un mismo plano).

----

a)

Los puntos P(1, 0, 0), Q(0, 2, 0) y R(0, 0, 3) determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{QP}=P-Q=(1,\ 0,\ 0)-(0,\ 2,\ 0)=(1,\ -2,\ 0).$$

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{RP}=P-R=(1,\ 0,\ 0)-(0,\ 0,\ 3)=(1,\ 0,\ -3).$$

La expresión general o cartesiana del plano π que determinan los puntos P, Q y R es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0\ ;;\ 6(x-1)+2z+3y=0\ ;;\ 6x-6+3y+2z=0.$$

$$\underline{\underline{\pi\equiv 6x+3y+2z-6=0}}$$

b)

Para que los puntos P, Q, R y S sean coplanarios es necesario que el punto S esté contenido en el plano, o sea, que satisfaga su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi\equiv 6x+3y+2z-6=0 \\ S(1,\ 2,\ 3) \end{array}\right\}\Rightarrow\ 6\cdot 1+3\cdot 2+2\cdot 3-6=0\ ;;\ 6+6+6-6=0\ ;;\ \underline{12=0??}.$$

El punto S no pertenece al plano π y, en consecuencia:

<u>Los puntos P, Q, R y S no son coplanarios.</u>

****