PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2011

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las siguientes seis cuestiones. En las respuestas, explique siempre qué es lo que quiere hacer y por qué.
Puede utilizar calculadora, pero no pueden utilizarse calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

CUESTIONES

1ª) Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{pmatrix}$:

a) Calcule los valores del parámetro k para los cuales la matriz M no es inversible.

b) Para k = 0, calcule M^{-1}.

----

a)

Una matriz no es inversible cuando su determinante es cero.

$$|M|=\begin{vmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{vmatrix}=-k(k+1)(k-2)-(k+1)(k-2)=(k+1)(k-2)(-k-1)=$$

$$=-(k+1)^2(k-2)=0 \Rightarrow \underline{k_1=-1} \;;\; \underline{k_2=2}.$$

La matriz M no es inversible para k = -1 y k = 2.

b)

Para k = 0 la matriz es $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Para hallar la inversa utilizamos el método de Gauss-Jordan.

$$(M/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_2 \to -\tfrac{1}{2}F_2\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\tfrac{1}{2} & 0 & -\tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to F_1 - F_2 \\ F_3 \to F_3 + 2F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \tfrac{3}{2} & 1 & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\tfrac{1}{2} & 0 & -\tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_3 \to -F_3\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \tfrac{3}{2} & 1 & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\tfrac{1}{2} & 0 & -\tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to F_1 - \tfrac{3}{2}F_3 \\ F_2 \to F_2 + \tfrac{1}{2}F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & \tfrac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\tfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{M^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & \tfrac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\tfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}}.$$

****

2ª) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$, encuentre la ecuación general (es decir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del plano π perpendicular a la recta por el punto P(1, 0, -1).

Un vector director de $r \equiv \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + z = -1 \end{cases}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (2,\ -1,\ 3)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ 0,\ 1)$.

$$\overrightarrow{v'_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i + 3j + k - 2j = -i + j + k = (-1,\ 1,\ 1) \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1,\ -1,\ -1).$$

El haz de planos perpendiculares a r tiene por expresión $\alpha \equiv x - y - z + D = 0$; de los infinitos planos de éste haz, el plano π que contiene al punto P(1, 0, -1) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv x - y - z + D = 0 \\ P(1,\ 0,\ -1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - 0 - (-1) + D = 0 \ ;;\ 2 + D = 0 \ ;;\ \underline{D = -2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv x - y - z - 2 = 0}}$$

****

3ª) Dada la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$:

a) Encuentre la relación que deben cumplir los parámetros α, b y c para que f(x) tenga un extremo relativo en el punto de abscisa x = -1.

b) Calcule el valor del parámetro α para que haya un punto de inflexión de la función f(x) en el punto de abscisa x = 0.

c) Encuentre la relación entre los parámetros α, b y c sabiendo que la gráfica de f(x) corta al eje OX en el punto de abscisa x = -2.

d) Calcule el valor de los parámetros α, b y c para que se cumplan las tres propiedades dadas anteriores simultáneamente.

----

a)

Para que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tenga un extremo relativo para x = -1 es condición necesaria que se anule su derivada para este valor:

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \;\Rightarrow\; f'(-1)=3\cdot(-1)^2+2a\cdot(-1)+b=0 \;;;\; 3-2a+b=0.$$

$$\underline{\underline{f(x)=x^3+ax^2+bx+c \;\; tiene \;\; un \;\; extremo \;\; relativo \;\; en \;\; x=-1 \;\; siendo \;\; 2a-b=3 \;\; y \;\; c\in R}}$$

b)

La función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene un punto de inflexión para x = 0 cuando se anule su segunda derivada para este valor:

$$f''(x)=6x+2a \;\Rightarrow\; f''(0)=0 \;\Rightarrow\; 0+2a=0 \;;;\; \underline{a=0}.$$

$$\underline{\underline{f(x)=x^3+ax^2+bx+c \;\; tiene \;\; un \;\; punto \;\; de \;\; \inf lexión \;\; en \;\; x=0 \;\; siendo \;\; a=0}}$$

c)

Para que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ corte al eje OX en x = -2 es necesario que sea $f(-2)=0$:

$$f(-2)=0 \;\Rightarrow\; (-2)^3+a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c=0 \;;;\; -8+4a-2b+c=0.$$

$$\underline{\underline{f(x)=x^3+ax^2+bx+c \;\; corta \;\; al \;\; eje \;\; OX \;\; en \;\; x=-2 \;\; siendo \;\; 4a+2b+c=8}}$$

d)

Por cumplirse la propiedad a) sabemos que: $2a-b=3$.   (1)

Por cumplirse la premisa b) sabemos que: $\underline{a=0}$.   (2)

Por cumplirse la premisa c) sabemos que: $4a+2b+c=8$.   (3)

Sabiendo que α = 0, de la expresión (1) se obtiene que $\underline{b=-3}$.

Finalmente, conocidos los valores de α y b, de la expresión (3) obtenemos c:

$4 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) + c = 8 \;;\; 0 - 6 + c = 8 \;;\; \underline{c = 14}$.

$$\underline{\underline{\textit{La función resulta ser } f(x) = x^3 - 3x + 14}}$$

****

4ª) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^2 y A^3.

b) Deduzca el valor de A^{101}. (Nota: Trabaje con radicales; no utilice la representación decimal de los elementos de la matriz)

----

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}-\frac{3}{4}+0 & \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}+0 & -0-0+0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}+0 & -\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+0 & 0-0+0 \\ 0+0+0 & -0-0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} =$$

$$\underline{\underline{= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^2}} \text{ .}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}+\frac{3}{4}+0 & \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}+0 & -0-0+0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}+0 & \frac{3}{4}+\frac{1}{4}+0 & -0-0+0 \\ 0+0+0 & -0-0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} =$$

$$\underline{\underline{= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^3}} \text{ .}$$

b)

Teniendo en cuenta el cociente adjunto, podemos hacer lo siguiente: $\begin{array}{r|l} 101 & 3 \\ \hline 2 & 33 \end{array}$

$$A^{101} = A^{33 \cdot 3} \cdot A^2 = \left(A^3\right)^{33} \cdot A^2 = I^{33} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = \underline{\underline{A^2 = A^{101}}} \text{ .}$$

$$\underline{\underline{A^{101} = A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

****

5ª) Considere la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = z - a$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - 5z = 5$.

a) Estudie la posición relativa de la recta r y el plano π en función del parámetro α.

b) Cuando α = 3, calcule la distancia de la recta r al plano π.

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = z - a \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-1 = 3z-3a \\ -x+1 = 3y+6 \end{array}\right\} \;;;\; \underline{r \equiv \begin{cases} x-3z-(1-3a) = 0 \\ x+3y+5 = 0 \end{cases}}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\begin{cases} x-3z = 1-3a \\ x+3y = -5 \\ 2x+y-5z = 5 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \;y\; M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1-3a \\ 1 & 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Según los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

Rango M = Rango M' = 3 $\rightarrow$ Secantes. (un punto en común)

Rango M = 2 ;; Rango M' = 3 $\rightarrow$ Paralelos. (ningún punto en común)

Rango M = Rango M' = 2 $\rightarrow$ Recta contenida en plano. (∞ puntos en común)

Los rangos de M y M' son los siguientes:

$$Rango\; M \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -15-3+18 = 0 \Rightarrow \underline{Rango\; M = 2}.$$

Determinamos ahora el rango de M':

$$\{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-3a \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 15+1-3a-6(1-3a)+5 = 21-3a-6+18a = 15+15a =$$

$$= 15(a+1) = 0 \Rightarrow \underline{a = -1}.$$

$$\{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1-3a \\ 1 & 0 & -5 \\ 2 & -5 & 5 \end{vmatrix} = -5(1-3a)+30-25+15=-5+15a+20=15a+15=$$

$=15(a+1)=0 \Rightarrow \underline{a=-1}$.

$$\{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1-3a \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & -5 & 5 \end{vmatrix} = -15(1-3a)+15+45=-15+45a+60=45a+45=$$

$=45(a+1)=0 \Rightarrow \underline{a=-1}$.

$$\underline{\underline{Para\ \ a \neq -1 \Rightarrow Rango\ \ M=2\ ;;\ Rango\ \ M'=3 \Rightarrow La\ \ recta\ \ r\ \ y\ \ el\ \ plano\ \ \pi\ \ son\ \ paralelos}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=-1 \Rightarrow Rango\ \ M=Rango\ \ M'=2 \Rightarrow La\ \ recta\ \ r\ \ está\ \ contenida\ \ en\ \ el\ \ plano\ \ \pi}}$$

b)

Para α = 3 la recta es $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = z-3$; es paralela al plano $\pi \equiv 2x+y-5z=5$, según el apartado anterior. La distancia de la recta r al plano π es la misma que la de un punto de r al plano π. Un punto de r es A(1, -2, 3).

La distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al plano $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ viene dado por la fórmula $d(P_0,\ \pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; aplicándola al punto $A(1,\ -2,\ 3)$ y al plano $\pi \equiv 2x+y-5z-5=0$, es:

$$d(A,\ \pi)=\frac{|2\cdot 1-2-5\cdot 3-5|}{\sqrt{2^2+1^2+(-5)^2}}=\frac{|2-2-15-5|}{\sqrt{4+1+25}}=\frac{20}{\sqrt{30}}=\frac{20\sqrt{30}}{30}=\underline{\underline{\frac{2\sqrt{30}}{3}\ u=d(r,\ \pi)}}$$

****

6ª) Sea $f(a)=\int_0^{\frac{1}{a}}\left(a^2+x^2\right)\cdot dx$ para α > 0.

a) Comprueba que $f(a)=\frac{1}{3a^3}+a$.

b) Calcule el valor del parámetro α para que la función f(α) tenga un mínimo relativo.

----

a)

$$f(a)=\int_0^{\frac{1}{a}}\left(a^2+x^2\right)\cdot dx=\left[a^2x+\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{a}}=\left[a^2\cdot\frac{1}{a}+\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^3}{3}\right]-0=\underline{a+\frac{1}{3a^3}}\,.$$

$$\underline{\underline{f(a)=\frac{1}{3a^3}+a,\ \textit{como tenÃamos que comprobar}}}$$

b)

Una función tiene un mínimo relativo para los valores que anulan la primera derivada y hacen positiva a la segunda derivada.

$$f'(a)=\frac{-9a^2}{\left(3a^3\right)^2}+1=\frac{-9a^2}{9a^6}+1=1-\frac{1}{a^4}=0\ ;;\ 1=\frac{1}{a^4}\ ;;\ a^4=1\Rightarrow\ \underline{a_1=-1}\ ;;\ \underline{a_2=1}.$$

$$f''(a)=0-\frac{-4a^3}{\left(a^4\right)^2}=\frac{4a^3}{a^8}=\frac{4}{a^5}\Rightarrow\begin{cases}f''(-1)=\frac{4}{(-1)^5}=\frac{4}{-1}=-4<0\Rightarrow\ \underline{\textit{Máx. para } x=-1}\\ \\ f''(1)=\frac{4}{1^5}=\frac{4}{1}=4>0\Rightarrow\ \underline{\textit{Mín. para } x=1}\end{cases}.$$

$$\underline{\underline{\textit{La función } f(a)=\frac{1}{3a^3}+a \textit{ tiene un mínimo relativo para } a=1}}$$

****