PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

JUNIO – 2010

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las siguientes seis cuestiones. En las respuestas, explique siempre qué es lo que quiere hacer y por qué.
Puede utilizar calculadora, pero no pueden utilizarse calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

CUESTIONES

1ª) Encuentre la ecuación general (es decir, de la forma Ax + By + Cz + D = 0) del plano que contiene a la recta $r_1 \equiv \frac{x-1}{2} = y = 2 - z$ y es paralelo a la recta $r_2 \equiv \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

La recta r_1 puede expresarse mejor de la forma $r_1 \equiv \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-2}{-1}$, donde se deduce con más facilidad su vector director es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\underline{\overrightarrow{v_1} = (2,\ 1,\ -1)}$.

La recta r_2 tiene como vector director a cualquier vector que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (1,\ -1,\ -1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ -2,\ 1)$:

$$\overrightarrow{v'_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -i - j - 2k + k - 2i - j = -3i - 2j - k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_2} = (3,\ 2,\ 1)}.$$

Considerando el punto A(1, 0, 2) perteneciente a la recta r_1 podemos obtener la ecuación general del plano π pedido, que es:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2}\right)\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0\ ;;\ (x-1)-3y+4(z-2)-3(z-2)+2(x-1)-2y=0\ ;;$$

$$3(x-1)-5y+(z-2)=0\ ;;\ 3x-3-5y+z-2=0.$$

El plano pedido es:

$$\underline{\underline{\pi\equiv 3x-5y+z-5=0}}$$

****

2ª) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=-1 \\ 2x+y+z=4 \\ x-y+(p-3)z=5 \end{array}\right\}$:

a) Estudie su carácter (es decir, si es compatible o no y si es determinado o no) en función del parámetro p.

b) Compruebe que si p ≠ 5, la solución del sistema no depende del valor de este parámetro.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & p-3 \end{pmatrix} \;\; y \;\; A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & p-3 & 5 \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función del parámetro p es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & p-3 \end{vmatrix}=p-3+2+2+1+1-4(p-3)=0 \;\;;;\;\; -3p+15=0 \;\Rightarrow\; \underline{p=5}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\; p\neq 5 \;\Rightarrow\; Rango \;\; A=Rango \;\; A'=3=n^{o} \;\; incógnitas \;\Rightarrow\; Compatible \;\; Determinado}}$$

$$Para \;\; p=5 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1+F_3=F_2\} \Rightarrow \underline{Rango \;\; de \;\; A'=2}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; p=5 \Rightarrow Rango \;\; A=Rango \;\; A'=2<n^{o} \;\; incóg. \;\Rightarrow\; Compatible \;\; Indeterminado}}$$

b)

Vamos a comprobar que para p ≠ 5 la solución del sistema no depende del parámetro p. Resolvemos por la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & p-3 \end{vmatrix}}{-3p+15}=\frac{-(p-3)+4+10+5-1-8(p-3)}{-3(p-5)}=\frac{-p+3+18-8p+24}{-3(p-5)}=$$

$$=\frac{-9p+45}{-3(p-5)}=\frac{-9(p-5)}{-3(p-5)}=\frac{-9}{-3}=\underline{\underline{3=x}}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 5 & p-3\end{vmatrix}}{-3(p-5)}=\frac{4(p-3)-10-1+4-5+2(p-3)}{-3(p-5)}=\frac{6p-18-12}{-3(p-5)}=\frac{6p-30}{-3(p-5)}=$$

$$=\frac{6(p-5)}{-3(p-5)}=\frac{6}{-3}=\underline{\underline{-2=y}}.$$

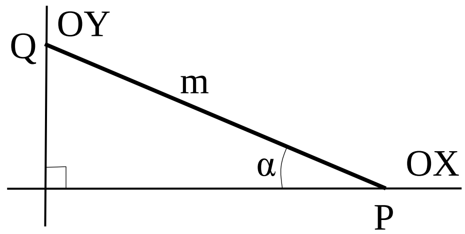
$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}}{-3(p-5)}=\frac{5+2+8+1+4-20}{-3(p-5)}=\frac{0}{-3(p-5)}=\underline{\underline{0=z}}.$$

Como puede observarse de la resolución:

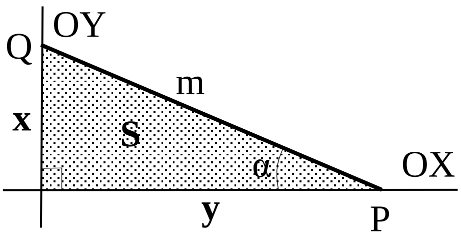
<u>Para p ≠ 5 la solución del sistema no depende de p, como debíamos comprobar.</u>

****

3ª) Un segmento de longitud fijada m se apoya sobre los ejes de coordenadas. Calcule el valor del ángulo α que forma el segmento con el eje OX para que el triángulo rectángulo determinado por el segmento con los ejes del cual m es la hipotenusa tenga área máxima. Compruebe que se trata realmente de un máximo.



Llamando x e y a los catetos del triángulo, su área es $S = \frac{x \cdot y}{2}$.



Sabiendo que el área de un triángulo es la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman, podemos expresar el área de nuestro triángulo de la forma siguiente:

$S = \frac{m \cdot y \cdot sen\ \alpha}{2}$. Como tenemos dos variables, hemos de expresar el área en función de una sola incógnita, para ello tenemos en cuenta que: $\cos \alpha = \frac{y}{m} \Rightarrow y = m \cdot \cos \alpha$. Sustituyendo en la fórmula anterior:

$S = \frac{m \cdot (m \cdot \cos \alpha) \cdot sen\ \alpha}{2} = \frac{m^2}{2} \cdot sen\ \alpha \cdot \cos \alpha$. Sabiendo que $sen\ (2\alpha) = 2\ sen\ \alpha \cdot \cos \alpha$, la expresión anterior puede ponerse de la forma: $S = \frac{m^2}{4} \cdot sen\ (2\alpha)$.

Para que el área sea máxima su derivada tiene que ser cero:

$$S' = \frac{m^2}{4} \cdot 2 \cdot \cos (2\alpha) = 0 \Rightarrow 2\alpha = 90º = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \frac{\pi}{4} = 45º}}.$$

<u>El área del triángulo es máxima cuando el ángulo α es de 45º.</u>

Para comprobar que se trata de un máximo expresamos el área como $S = \frac{x \cdot y}{2}$.

Para expresar el área en función de una sola variable aplicamos el teorema de Pitágoras: $m^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \underline{y = \sqrt{m^2 - x^2}}$.

Sustituyendo en la fórmula de S el valor de y: $S = \frac{x \cdot \sqrt{m^2 - x^2}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 x^2 - x^4}$.

Para que exista un máximo tiene que ser cero la derivada:

$$S'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2m^2x-4x^3}{2\sqrt{m^2x^2-x^4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{m^2-2x^2}{\sqrt{m^2-x^2}}=0\ \Rightarrow\ m^2-2x^2=0\ ;;\ \underline{m^2=2x^2}\ .$$

Como por otra parte es $m^2=x^2+y^2$, se tiene que $2x^2=x^2+y^2\ \Rightarrow\ \underline{y=x}$.

<u>De lo anterior se deduce que α = 45º, como teníamos que demostrar.</u>

****

4ª) Dadas las rectas $r_1 \equiv \frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-4}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} 2x+y+2z+5=0 \\ 2x-y+z+11=0 \end{cases}$:

a) Compruebe que son paralelas.

b) Encuentre la ecuación general (es decir, de la forma Ax + By + Cz + D = 0) del plano que las contiene.

----

a)

La recta r_1 tiene como vector director a cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\underline{\overrightarrow{v_1} = (3,\ 2,\ -4)}$.

La recta r_2 tiene como vector director a cualquier vector que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (2,\ 1,\ 2)$ y $\overrightarrow{n_2} = (2,\ -1,\ 1)$:

$$\overrightarrow{v'_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i + 4j - 2k - 2k + 2i - 2j = 3i + 2j - 4k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_2} = (3,\ 2,\ -4)}.$$

Los vectores directores de las rectas son linealmente dependientes (iguales), por lo cual las rectas son paralelas o coincidentes. Para diferenciar el caso tomamos un punto de una de las rectas y comprobamos que no pertenece a la otra recta, en cuyo caso las rectas son paralelas y no coincidentes.

Sea el punto A(-5, 1, 2) perteneciente a la recta r_1; veamos que no pertenece a la recta r_2:

$$\left.\begin{array}{l} r_2 \equiv \begin{cases} 2x+y+2z+5=0 \\ 2x-y+z+11=0 \end{cases} \\ A(-5,\ 1,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\cdot(-5)+1+2\cdot 2+5=0 \\ 2\cdot(-5)-1+2+11 \neq 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -10+6+4=0 \\ -10-1+13 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A \notin r_2}.$$

<u>Las rectas r_1 y r_2 son paralelas, como teníamos que comprobar.</u>

b)

Un punto perteneciente a la recta r_1 es A(-5, 1, 2); para determinar un punto B de la recta r_2 la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$r_2 \equiv \begin{cases} 2x+y+2z+5=0 \\ 2x-y+z+11=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y=-5-2\lambda \\ 2x-y=-11-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 4x=-16-3\lambda \;;\; \underline{x=-4-\frac{3}{4}\lambda} \;;\;$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=-5-2\lambda \\ -2x+y=11+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=6-\lambda \;;\; \underline{y=3-\frac{1}{2}\lambda} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x=-4+\frac{3}{4}\lambda \\ y=3-\frac{1}{2}\lambda \\ z=\pi \end{cases} \Rightarrow \underline{B(-4,\ 3,\ 0)}.$$

Podemos obtener el vector $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{AB}=B-A=(-4,\ 3,\ 0)-(-5,\ 1,\ 2)=(1,\ 2,\ -2)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{w}$ con, por ejemplo, el punto A determinan el plano π pedido:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{w}\right)\equiv\begin{vmatrix} x+5 & y-1 & z-2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0\ ;;$$

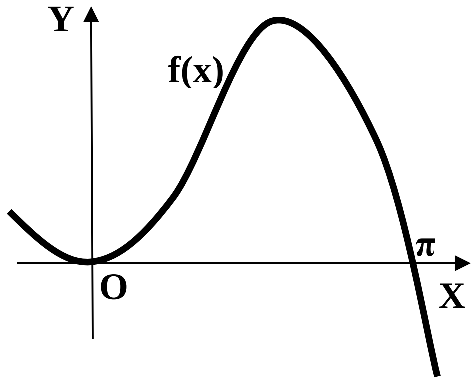
$-4(x+5)-4(y-1)+6(z-2)-2(z-2)+8(x+5)+6(y-1)=0\ ;;\ 4(x+5)+2(y-1)+4(z-2)=0\ ;;$

$2(x+5)+(y-1)+2(z-2)=0\ ;;\ 2x+10+y-1+2z-4=0$. El plano pedido es:

$$\underline{\underline{\pi\equiv 2x+y+2z+5=0}}$$

****

5ª) La gráfica de la función $f(x) = x \cdot sen\ x$ es, aproximadamente, la de la figura.



a) Encuentre una primitiva de la función.

b) Aplicando el resultado del apartado anterior, calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función f(x) y el eje de abscisas desde x = 0 hasta $x = \pi$.

----

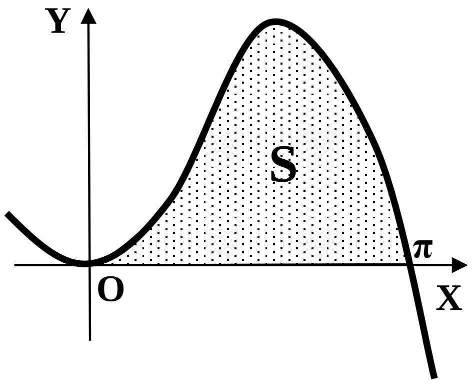
a)

Procediendo por el método de "por partes":

$$I = \int x \cdot sen\ x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = u \rightarrow du = dx \\ sen\ x \cdot dx = dv \rightarrow v = -\cos\ x \end{array} \right\} \Rightarrow I = x \cdot (-\cos\ x) - \int -\cos\ x \cdot dx =$$

$$= -x \cdot \cos\ x + \int \cos\ x \cdot dx = \underline{\underline{-x \cdot \cos\ x + sen\ x = I}}.$$

b)



$$S = \int_0^{\pi} x \cdot sen\ x \cdot dx = [-x \cdot \cos\ x + sen\ x]_0^{\pi} =$$

$$= [-\pi \cdot \cos\ \pi + sen\ \pi] - [-0 \cdot \cos\ 0 + sen\ 0] =$$

$$= -\pi \cdot \cos\ \pi + sen\ \pi = -\pi \cdot (-1) + 0 = \underline{\underline{\pi\ u^2 = S}}$$

****

6ª) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$, encuentre los valores de las variables x e y para que se cumpla que $A^2 = A$.

$$A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} x^2-6 & 3x+3y \\ -2x-2y & -6+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-6=x \\ \left.\begin{array}{l} -2x-2y=-2 \\ 3x+3y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x+y=1}. \\ y^2-6=y \end{cases}$$

$$x^2-x-6=0 \;;\; x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x_1=-2}} \rightarrow \underline{\underline{y_1=3}} \\ \\ \underline{\underline{x_2=3}} \rightarrow \underline{\underline{y_2=-2}} \end{cases}.$$

<u>Nota</u>: La ecuación $y^2-y-6=0$ produce las mismas soluciones.

****