PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

JUNIO – 2009

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a TRES de las cuatro cuestiones y resuelva UNO de los dos problemas. En las respuestas, explique siempre qué hace y por qué.
Puede utilizar calculadora científica para el cálculo de funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y especiales, así como para realizar cálculos estadísticos. No se podrán utilizar calculadoras u otros instrumentos que lleven información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

OPCIÓN A

CUESTIONES

1ª) Dados el punto P(1, 2, 3) y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{-1}$:

a) Encontrar la ecuación cartesiana (es decir, de la forma Ax + By + Cz + D = 0) del plano π que pasa por P y es perpendicular a la recta r.

b) Hallar el punto Q de corte de la recta r con el plano π

----

a)

La recta r tiene como vector director a $\overrightarrow{v} = (2,\ 3,\ -1)$.

El plano π, por ser perpendicular a r, tiene como vector normal a cualquiera que sea linealmente dependiente de $\overrightarrow{v} = (2,\ 3,\ -1)$, o sea, que el vector normal puede ser el propio vector $\overrightarrow{v}$: $\overrightarrow{n} = (2,\ 3,\ -1)$.

La ecuación del haz de planos paralelos y perpendiculares a r tiene por ecuación cartesiana $\alpha \equiv 2x + 3y - z + D = 0$. De todo éstos infinitos planos, el plano π, que contiene al punto P(1, 2, 3), tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv 2x + 3y - z + D = 0 \\ P(1,\ 2,\ 3) \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + D = 0\ ;;\ 2 + 6 - 3 + D = 0\ ;;\ \underline{D = -5}.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x + 3y - z - 5 = 0}}$$

b)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases}$.

El punto Q de corte de r con π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x + 3y - z - 5 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \ 2(1 + 2\lambda) + 3(-2 + 3\lambda) - (5 - \lambda) - 5 = 0 \ \ ;;$$

$$2 + 4\lambda - 6 + 9\lambda - 5 + \lambda - 5 = 0 \ \ ;; \ \ 14\lambda - 14 = 0 \ \ ;; \ \ \lambda - 1 = 0 \ \ ;; \ \ \underline{\lambda = 1}$$

$$\underline{\underline{Q(3,\ 1,\ 4)}}$$

****

2ª) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Comprobar que la inversa de A es A^2.

b) Comprobar también que A^{518} = B.

----

a)

La inversa de la matriz A se obtiene mediante el Método de Gauss-Jordan:

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0+1+0 \\ 0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 1+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=A^2}$$

$$\underline{\underline{A^{-1}=A^2,\ \ c.\ q.\ d.}}$$

b)

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 1+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+1+0 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=A^3=I}$$

La potencia n-ésima de A es igual que A elevado al resto de la división de n por tres. Teniendo en cuenta que:

$$\begin{array}{l|l} 518 & 3 \\ \hline 21 & 172 \\ \ \ 08 & \\ \ \ \ 2 & \end{array}$$

$$\underline{\underline{A^{518}=A^2=B,\ \ c.\ q.\ d.}}$$

****

3ª) Se considera la función $f(x)=\frac{x(a-x)}{a^3}$, con a > 0.

a) Encontrar los puntos de corte de la función f(x) con el eje OX.

b) Comprobar que el área del recinto limitado por la gráfica de la función f(x) y el eje de abscisas no depende del valor del parámetro a.

----

a)

Los puntos de corte de la función f(x) con el eje OX son los valores de x que la anulan:

$$f(x)=\frac{x(a-x)}{a^3}=0 \Rightarrow x(a-x)=0 \Rightarrow \underline{x_1=0} \;;;\; \underline{x_2=a} \Rightarrow \underline{\underline{O(0,\ 0)}} \;;;\; \underline{\underline{P(a,\ 0)}}$$

b)

$$S=\left|\int_0^a f(x)\cdot dx\right| \Rightarrow \int_0^a f(x)\cdot dx=\int_0^a \frac{x(a-x)}{a^3}\cdot dx=\frac{1}{a^3}\cdot\int_0^a \left(ax-x^2\right)\cdot dx=\frac{1}{a^3}\cdot\left[\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=$$

$$=\frac{1}{a^3}\cdot\left[\left(\frac{a\cdot a^2}{2}-\frac{a^3}{3}\right)-\left(\frac{a\cdot 0^2}{2}-\frac{0^3}{3}\right)\right]=\frac{1}{a^3}\cdot\left(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\underline{\frac{1}{6}}$$

$$S=\left|\int_0^a f(x)\cdot dx\right|=\left|\frac{1}{6}\right|=\underline{\underline{\frac{1}{6}\,u^2=S}}$$

<u>En efecto, el área del recinto no depende del parámetro a, como queríamos comprobar.</u>

****

4ª) En la resolución del método de Gauss de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas nos hemos encontrado la matriz siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \end{array}\right)$$

a) Explique, razonadamente, cual es el carácter del sistema inicial.

b) Si es compatible, encontrad la solución.

----

a)

La matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \end{array}\right)$ es equivalente a $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \end{array}\right)$, cuyo rango es 2, tanto la matriz de coeficientes como la matriz ampliada, lo que supone, según el Teorema de Rouché-Fröbenius que el sistema es compatible indeterminado.

b)

Siendo el sistema $\left.\begin{array}{r} 3x-5y+2z=-5 \\ 3y-6z=6 \end{array}\right\}$, su solución es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-5y+2z=-5 \\ 3y-6z=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \;\; ;; \;\; 3y=6+6\lambda \;\; ;; \;\; \underline{y=2+2\lambda} \;\; ;; \;\; 3x=-5+5y-2z=$$

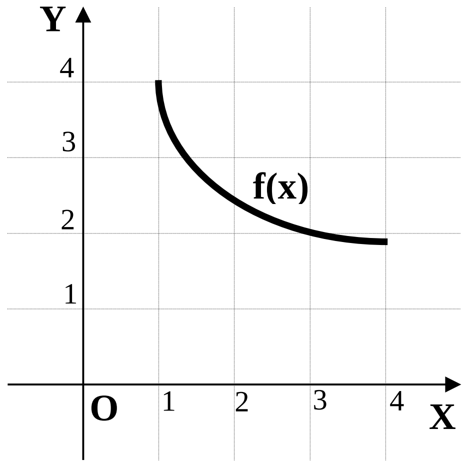
$$=-5+5(2+2\lambda)-2\lambda=-5+10+10\lambda-2\lambda=5+8\lambda=3x \;\; ;; \;\; \underline{x=\frac{5}{3}+\frac{8}{3}\lambda}$$

$$Solución: \begin{cases} x=\frac{5}{3}+\frac{8}{3}\lambda \\ y=2+2\lambda, \quad \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}$$

****

PROBLEMAS

1º) La gráfica de la función $f(x)=\frac{3+x}{x}$, desde x = 1 hasta x = 4, es la de la figura:



a) Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la función en los puntos de abscisa $x=1$ y $x=3$.

b) Dibuje el recinto limitado por la gráfica de la función y las dos rectas tangentes que ha calculado.

c) Encontrad los vértices de ese recinto.

d) Calculad la superficie del mencionado recinto.

----

a)

La ecuación de una recta conocida la pendiente es $y-y_0=m(x-x_0)$, siendo m el valor de la pendiente.

La pendiente a una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x)=\frac{1\cdot x-(x+3)\cdot 1}{x^2}=\frac{x-x-3}{x^2}=\frac{-3}{x^2}=f'(x)$$

$$f'(1)=m_1=\frac{-3}{1^2}=-3=m_1 \quad ;; \quad f'(3)=m_1=\frac{-3}{3^2}=-\frac{3}{9}=-\frac{1}{3}=m_2$$

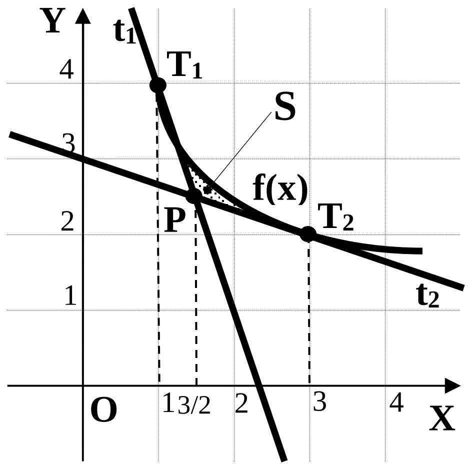
$$f(1)=\frac{3+1}{1}=\frac{4}{1}=4 \;\Rightarrow\; T_1(1,\ 4) \quad ;; \quad f(3)=\frac{3+3}{3}=\frac{6}{3}=2 \;\Rightarrow\; T_2(3,\ 2)$$

Las tangentes pedidas son las siguientes:

$$t_1 \;\Rightarrow\; y-4=-3(x-1)=-3x+3 \;\Rightarrow\; t_1\equiv 3x+y-7=0$$

$$t_2 \;\Rightarrow\; y-2=-\frac{1}{3}(x-3)\;;;\; 3y-6=-x+3 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{t_2 \equiv x+3y-9=0}}$$

b)



c)

Los vértices del recinto son los puntos de tangencia T_1 y T_2 y el punto P, intersección de las tangentes t_1 y t_2:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y-7=0 \\ x+3y-9=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -3x-y+7=0 \\ 3x+9y-27=0 \end{array}\right\} \Rightarrow\; 8y-20=0\;;;\; 8y=20\;;;\; 2y=5\;;;\; \underline{y=\frac{5}{2}}$$

$$x+3y-9=0\;;;\; x=9-3y=9-3\cdot\frac{5}{2}=9-\frac{15}{2}=\frac{18-15}{2}=\underline{\frac{3}{2}=x} \;\Rightarrow\; \underline{P\left(\frac{5}{2},\;\frac{3}{2}\right)}$$

$$\underline{\underline{\textit{Los vértices del recinto son } T_1(1,\;3),\; T_2(3,\;2) \;\; y \;\; P\left(\frac{5}{2},\;\frac{3}{2}\right).}}$$

d)

Para el cálculo de la superficie tendremos en cuenta que las ordenadas correspondientes de la función en el intervalo (1, 3), son mayores que las correspondientes de cada una de las rectas tangentes.

$$S=\int_1^{\frac{3}{2}}\left[\frac{3+x}{x}-(7-3x)\right]dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left[\frac{3+x}{x}-\left(\frac{9-x}{3}\right)\right]dx=\int_1^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{x}+1-7+3x\right)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left[\left(\frac{3}{x}+1-3+\frac{x}{3}\right)\right]dx=$$

$$=\int_1^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{x}+3x-6\right)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left[\left(\frac{3}{x}+\frac{x}{3}-2\right)\right]dx=\left[3Lx+\frac{3x^2}{2}-6x\right]_1^{\frac{3}{2}}+\left[3Lx+\frac{x^2}{6}-2x\right]_{\frac{3}{2}}^{3}=$$

$$=\left[3L\frac{3}{2}+\frac{3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2}-6\cdot\frac{3}{2}\right]-\left[3L1+\frac{3\cdot 1^2}{2}-6\cdot 1\right]+\left[3L3+\frac{3^2}{6}-2\cdot 3\right]-\left[3L\frac{3}{2}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{6}-2\cdot\frac{3}{2}\right]=$$

$$=\left[3\left(L3-L2\right)+\frac{27}{8}-9\right]-\left(3\cdot 0+\frac{3}{2}-6\right)+\left(3L3+\frac{3}{2}-6\right)-\left[3\left(L3-L2\right)+\frac{3}{8}-3\right]=$$

$$=3L3-3L2+\frac{27}{8}-9-\frac{3}{2}+6+3L3+\frac{3}{2}-6-3L3+3L2-\frac{3}{8}+3=\frac{24}{8}+3L3-6=3L3-3=$$

$$=3\left(L3-1\right)\cong 3\left(1'099-1\right)=\underline{\underline{0'296\,u^2=S}}$$

****

2º) Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} bx+y+3z=1 \\ x+2y+5z=1 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x}{1}=\frac{y-b}{b+1}=\frac{z+1}{-1}$, dependientes de un parámetro b:

a) Encuentre los puntos de corte de las recta r y s con el plano de ecuación x = 0.

b) Calcule un vector director de cada una de las rectas.

c) Estudie la posición relativa de las dos rectas en función del parámetro b.

----

a)

El punto P de corte de la recta r con el plano x = 0 se obtiene resolviendo el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que determinan:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} bx+y+3z=1 \\ x+2y+5z=1 \end{cases} \\ \underline{x=0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y+3z=1 \\ 2y+5z=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2y+6z=2 \\ -2y-5z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=1} \;;;\; y=1-3z=1-3=\underline{-2=y}$$

$$\underline{\underline{P(0,\ -2,\ 1)}}$$

La expresión de s por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$s \equiv \frac{x}{1}=\frac{y-b}{b+1}=\frac{z+1}{-1} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (b+1)x=y-b \\ -x=z+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} (b+1)x-y=-b \\ x+z=-1 \end{cases}}$$

El punto Q de corte de la recta s con el plano x = 0 se obtiene resolviendo el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que determinan:

$$\left.\begin{array}{l} s \equiv \begin{cases} (b+1)x-y=-b \\ x+z=-1 \end{cases} \\ \underline{x=0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -y=-b \\ \underline{z=-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=b}$$

$$\underline{\underline{Q(0,\ b,\ -1)}}$$

b)

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} bx+y+3z=1 \\ x+2y+5z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y+3z=1-b\lambda \\ 2y+5z=1-\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2y+6z=2-2b\lambda \\ -2y-5z=-1+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=1+(1-2b)\lambda}$$

$$y=1-b\lambda-3z=1-b\lambda-3-3(1-2b)\lambda=-2-b\lambda-3\lambda+6b\lambda=\underline{-2+(5b-3)\lambda=y} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + (5b-3)\lambda \\ z = 1 + (1-2b)\lambda \end{cases}}$$

Dos vectores directores de r y s pueden ser, respectivamente, los siguientes:

$$\underline{\underline{\overrightarrow{v_r} = (1,\ 5b-3,\ 1-2b)}} \quad y \quad \underline{\underline{\overrightarrow{v_s} = (1,\ b+1,\ -1)}}$$

c)

Realizamos el estudio de la posición relativa de las dos rectas mediante el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas que determinan.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} b & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ b+1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad A' = \begin{pmatrix} b & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ b+1 & -1 & 0 & -b \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Según los rangos de A y A’ pueden presentarse los casos siguientes:

Rango A = Rango A’ = 2 $\rightarrow$ Coincidentes

Rango A = 2 ;; Rango A’ = 3 $\rightarrow$ Paralelas

Rango A = Rango A’ = 3 $\rightarrow$ Secantes

Rango A = 3 ;; Rango A’ = 4 $\rightarrow$ Se cruzan

Empezamos calculando el rango de A’:

$$|A'| = \begin{vmatrix} b & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ b+1 & -1 & 0 & -b \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} C_1 \to C_1 + C_4 \\ C_3 \to C_3 + C_4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} b+1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & -b & -b \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} b+1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -b \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} b+1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -b \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 + F_3 \\ F_2 \to F_2 + F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow -2 \cdot \begin{vmatrix} b+2 & 0 & 4-b \\ 2 & 0 & 3-b \\ 1 & -1 & -b \end{vmatrix} =$$

$$= +2 \cdot \begin{vmatrix} b+2 & 4-b \\ 2 & 3-b \end{vmatrix} = 2[(b+2)(3-b) - 2(4-b)] = 2(3b - b^2 + 6 - 2b - 8 + 2b) = -2(b^2 - 3b + 2) = 0.$$

$$b=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}\Rightarrow \underline{b_1=1}\ ;;\ \underline{b_2=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix} b\neq 1 \\ b\neq 2\end{Bmatrix}\Rightarrow Rango\ A=3\ ;;\ Rango\ A'=4\Rightarrow Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan}}$$

$$Para\ b=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow Rango\ A\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \{F_1,\ F_2,\ F_3\}\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=-3+10-12+5=15-15=0 \\ \{F_1,\ F_2,\ F_4\}\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=2+5-6-1=7-7=0 \\ \{F_2,\ F_3,\ F_4\}\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1+5-4=5-5=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \underline{Rango\ A=2}.$$

$$Para\ b=1\Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow Rango\ A'\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-5-3+5+6=$$

$$=3\neq 0\Rightarrow \underline{Rango\ A'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ b=1\Rightarrow Rango\ A=2\ ;;\ Rango\ A'=3\Rightarrow Las\ rectas\ r\ y\ s\ son\ paralelas}}$$

$$Para\ b=2\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow Rango\ A\Rightarrow \{F_1,\ F_2,\ F_3\}\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=-3+15-18+10=25-21=4\neq 0\Rightarrow \underline{Rango\ A=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ b=2\Rightarrow Rango\ A=Rango\ A'=3\Rightarrow Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cor\tan}}$$

****