PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2009

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II　　　　Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a TRES de las cuatro cuestiones y resuelva UNO de los dos problemas. En las respuestas, explique siempre qué hace y por qué.
Puede utilizar calculadora científica para el cálculo de funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y especiales, así como para realizar cálculos estadísticos. No se podrán utilizar calculadoras u otros instrumentos que lleven información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

OPCIÓN A

CUESTIONES

1ª) Considerad la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix}$. Calculad el valor de los parámetros α y b para que $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+0 & 0-0 \\ a-b & 0+b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a-b & b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=1 \\ a-b=-2 \\ b^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} a^2=1 \\ b=a+2 \end{array}\right\} \Rightarrow (a+2)^2=1 \Rightarrow a_1=-1 \;;\; a_2=-3 \Rightarrow \underline{a=-1} \\ \left.\begin{array}{l} b^2=1 \\ a=b-2 \end{array}\right\} \Rightarrow (b-2)^2=1 \Rightarrow b_1=1 \;;\; b_2=3 \Rightarrow \underline{b=1} \end{cases}$$

Los valores que cumplen lo pedido son a = - 1 y b = 1.

****

2ª) Considerad en el espacio R^3 las rectas r y s, cuyas ecuaciones respectivas son las siguientes: $r \equiv (x,\ y,\ z) = (4,\ 1,\ 0) + \lambda(m,\ 1,\ 1)$, $s \equiv \begin{cases} x + 2y + mz = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$, donde m es un parámetro real. Estudiad si hay algún valor del parámetro m para el cual las rectas son perpendiculares y se cortan.

La expresión de la recta r por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv (x,\ y,\ z) = (4,\ 1,\ 0) + \lambda(m,\ 1,\ 1) \ ;; \ r \equiv \begin{cases} x = 4 + m\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \ ;; \ \frac{x-4}{m} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1} \ ;; \ \begin{cases} x - 4 = my - m \\ x - 4 = mz \end{cases}$$

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x - my = 4 - m \\ x - mz = 4 \end{cases}}$$

Las rectas r y s determinan el sistema $\begin{cases} x - my = 4 - m \\ x - mz = 4 \\ x + 2y + mz = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$, cuyas matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & -m & 0 \\ 1 & 0 & -m \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} 1 & -m & 0 & 4-m \\ 1 & 0 & -m & 4 \\ 1 & 2 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Según los rangos de A y A' pueden presentarse los casos siguientes:

Rango A = Rango A' = 2 → <u>Coincidentes</u> ;; Rango A = 2 ;; Rango A' = 3 → <u>Paralelas</u>

Rango A = Rango A' = 3 → <u>Secantes</u> ;; Rango A = 3 ;; Rango A' = 4 → <u>Se cruzan</u>

Para que las rectas se corten es necesario que Rango A = Rango A' = 3, para lo cual es necesario que se anule el determinante de A'

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & -m & 0 & 4-m \\ 1 & 0 & -m & 4 \\ 1 & 2 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{ Restando a cada fila la anterior } \Rightarrow$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & -m & 0 & 4-m \\ 0 & m & -m & m \\ 0 & 2 & 2m & -4 \\ 0 & -1 & 1-m & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & -m & m \\ 2 & 2m & -4 \\ -1 & 1-m & 1 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2m & -4 \\ -1 & 1-m & 1 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2m+2 & -6 \\ -1 & -m & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

(La primera columna se ha sumado la segunda y restado a la tercera)

$$\Rightarrow \; |A'| = m\begin{vmatrix} 2m+2 & -6 \\ -m & 2 \end{vmatrix} = m(4m+4-6m) = m(4-2m) = 2m(2-m) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{m_1 = 0} \;;;\; \underline{m_2 = 2}.$$

Las rectas se cortan para m = 0 y para m = 2.

Veamos ahora si son perpendiculares las rectas para los valores de m hallados, para lo cual es necesario que los vectores directores de las rectas sean perpendiculares.

<u>Para m = 0:</u>

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (0,\ 1,\ 1)$.

Para hallar un vector director de la recta s la expresamos mediante unas ecuaciones paramétricas:

$$s \equiv \begin{cases} x+2y=0 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=0 \\ x+y=1-\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+2y=0 \\ -x-y=-1+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=-1+\lambda} \;;;$$

$$x = 1-\lambda-y = 1-\lambda+1-\lambda = \underline{2-2\lambda = x} \;\Rightarrow\; \underline{s \equiv \begin{cases} x = 2-2\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Un vector director de la recta s es $\overrightarrow{v_s} = (-2,\ 1,\ 1)$.

Para que dos vectores sean perpendiculares su producto escalar tiene que ser 0:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = (0,\ 1,\ 1) \cdot (-2,\ 1,\ 1) = -0+1+1 = 2 \neq 0.$$

<u>Para m = 0 las rectas se cortan pero no son perpendiculares.</u>

<u>Para m = 2:</u>

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (2,\ 1,\ 1)$.

Para hallar un vector director de la recta s la expresamos mediante unas ecuaciones paramétricas:

$$s \equiv \begin{cases} x+2y+2z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=-2\lambda \\ x+y=1-\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+2y=-2\lambda \\ -x-y=-1+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=-1-\lambda} \;;;$$

$$x = 1-\lambda-y = 1-\lambda+1+\lambda = \underline{2 = x} \;\Rightarrow\; \underline{s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -1-\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Un vector director de la recta s es $\overrightarrow{v_s} = (0, \ -1, \ 1)$.

Para que dos vectores sean perpendiculares su producto escalar tiene que ser 0:

$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = (2, \ 1, \ 1) \cdot (0, \ -1, \ 1) = 0 - 1 + 1 = 0 \ \Rightarrow \ \underline{\overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{v_s}}$.

<u>Para m = 2 las rectas r y s se cortan y son perpendiculares.</u>

****

3ª) Sea la función $f(x)=2x^3-x^2+3x+1$. Dadas las rectas $r_1 \equiv y=x+2$ y $r_2 \equiv y=7x-2$:

a) Explicad, razonadamente, si alguna de las dos rectas dadas puede ser tangente a la curva dada f(x) en algún punto.

b) En caso de que alguna de ellas lo sea, hallad el punto de tangencia.

----

a)

La pendiente a una curva en un punto es el valor de su derivada en ese punto.

La derivada de la función es $f'(x)=6x^2-2x+3$.

La pendiente de la recta $r_1 \equiv y=x+2$ es $m_1 = 1$; para que ésta recta sea tangente a la función es condición necesaria que la derivada sea igual a la pendiente:

$$f'(x)=6x^2-2x+3=1 \;\;;;\;\; 6x^2-2x+2=0 \;\;;;\;\; 3x^2-x+1=0 \;\;;;\;\; x=\frac{1\pm\sqrt{1-12}}{6} \Rightarrow \underline{x \notin R}.$$

<u>La recta r_1 no puede ser tangente a la función dada.</u>

La pendiente de la recta $r_2 \equiv y=7x-2$ es $m_2 = 7$; para que ésta recta sea tangente a la función es condición necesaria que la derivada sea igual a la pendiente:

$$f'(x)=6x^2-2x+3=7 \;\;;;\;\; 6x^2-2x-4=0 \;\;;;\;\; 3x^2-x-2=0 \;\;;;\;\; x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{6}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{6}=$$

$$=\frac{1\pm 5}{6} \Rightarrow \underline{x_1=-\frac{2}{3}} \;\;;;\;\; \underline{x_2=1}$$

Para que la recta sea tangente para los valores de x hallados, tienen que satisfacer las ecuaciones de la recta y de la función, o sea: el punto tiene que ser común, que es el punto o puntos de tangencia.

$$x=-\frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} y\left(-\frac{2}{3}\right)=7\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-2=-\frac{14}{3}-2=\underline{-\frac{20}{3}} \\ f\left(-\frac{2}{3}\right)=2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3-\left(-\frac{2}{3}\right)^2+3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+1=-\frac{16}{27}-\frac{4}{9}-1=-\frac{16+12+27}{27}=-\frac{55}{27} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{20}{3} \neq -\frac{55}{27} \Rightarrow \underline{Para \;\; x=-\frac{2}{3} \;\; no \;\; hay \;\; punto \;\; de \;\; \tan gencia}$$

$$x=1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} y(1)=7\cdot 1-2=7-2=\underline{5} \\ \\ f(1)=2\cdot 1^3-1^2+3\cdot 1+1=2-1+3+1=\underline{5} \end{cases} \Rightarrow \underline{Para\;\; x=1\;\; hay\;\; punto\;\; de\;\; \tan gencia}$$

$$\underline{\underline{La\;\; recta\;\; r_2 \equiv y=7x-2\;\; es\;\; \tan gente\;\; a\;\; la\;\; función\;\; f(x)=2x^3-x^2+3x+1}}$$

b)

<u>El punto de tangencia es P(1, 5)</u>

****

4ª) Dados los vectores $\overrightarrow{v_1}=(a+1,\ 2a,\ 1)$, $\overrightarrow{v_2}=(-2,\ a,\ 2a)$ y $\overrightarrow{v_3}=(a,\ -2,\ 4a-2)$ de R³:

a) Calculad el ángulo que forman $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ cuando α = 0.

b) Hallar el valor del parámetro α para que los vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$ sean perpendiculares dos a dos.

----

a)

Para α = 0 los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ son $\overrightarrow{v_1}=(1,\ 0,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_2}=(-2,\ 0,\ 0)$.

El ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\beta \Rightarrow \cos\beta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}$; aplicando la fórmula a los vectores que nos ocupan:

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}}{\left|\overrightarrow{v_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_2}\right|}=\frac{(1,\ 0,\ 1)\cdot(-2,\ 0,\ 0)}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\cdot 2}=\frac{-2}{\sqrt{2}\cdot 2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{\beta=135^{\circ}=\frac{3\pi}{2}\ rad}$$

$$\underline{\underline{\textit{Los vectores } \overrightarrow{v_1} \textit{ y } \overrightarrow{v_2} \textit{ forman un ángulo de } 135^{\circ}=\frac{3\pi}{2}\ rad}}$$

b)

Tiene que cumplirse que: $\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}=0$;; $\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_3}=0$;; $\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_3}=0$.

$$\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}=(a+1,\ 2a,\ 1)\cdot(-2,\ a,\ 2a)=-2a-2+2a^2+2a=2a^2-2=2\left(a^2-1\right)=0\ ;;$$

$$a^2-1=0 \Rightarrow \underline{a_1=-1}\ ;;\ \underline{a_2=1}$$

$$\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_3}=(a+1,\ 2a,\ 1)\cdot(a,\ -2,\ 4a-2)=a^2+a-4a+4a-2=a^2+a-2=0\ ;;$$

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow \underline{a_1=-2}\ ;;\ \underline{a_2=1}$$

$$\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_3}=(-2,\ a,\ 2a)\cdot(a,\ -2,\ 4a-2)=-2a-2a+8a^2-4a=8a^2-8a=8\left(a^2-1\right)=0\ ;;$$

$a^2-1=0 \Rightarrow \underline{a_1=-1}\ ;;\ \underline{a_2=1}$. El único valor que satisface la condición pedida es α = 1.

<u>Los vectores son perpendiculares dos a dos para el valor de α = 1.</u>

****

PROBLEMAS

1º) Considerad la función real de variable real $f(x)=\frac{2x^3}{x^2-1}$.

a) Calculad el dominio.

b) Calculad la ecuación de las asíntotas, si las tiene.

c) Estudiad los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como las abscisas de sus extremos relativos, si los tiene, clasificándolos.

----

a)

El dominio de una función racional es el conjunto de los número reales, excepto los valores de x que anulan el denominador.

$$x^2-1=0 \;\Rightarrow\; \underline{x_1=-1} \;;;\; \underline{x_2=1}.$$

$$\underline{\underline{D(f)\Rightarrow R-\{-1,\ 1\}}}$$

b)

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales u oblicuas.

Las asíntotas horizontales son de la forma y = k, son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer más infinito o menos infinito.

La función $f(x)=\frac{2x^3}{x^2-1}$ no tiene asíntotas horizontales por lo siguiente:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{-\infty}{1-0}=-\infty$$

Las asíntotas verticales son de la forma x = k; son los valores finitos de x para los cuales la función toma valor infinito, o sea, son los valores de x que anulan el denominador.

La función $f(x)=\frac{2x^3}{x^2-1}$ tiene como <u>asíntotas verticales las rectas x = 1 y x = -1.</u>

Las asíntotas oblicuas son de la forma y = mx + n, siendo:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3}{x(x^2-1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3}{x^3 - x} = \underline{2 = m}$$

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^3}{x^2-1} - 2x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^2-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x^2-1} = \underline{0 = n}$$

La función $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-1}$ tiene como asíntota oblicua la recta y = 2x.

c)

Una función es creciente o decreciente para los valores de x que hacen que su derivada sea positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{3x^2 \cdot (x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = 2 \cdot \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = 2 \cdot \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \underline{\frac{2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = f'(x)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0 \;;;\; 2x^2(x^2-3) = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 0} \;;;\; \underline{x_2 = \sqrt{3}} \;;;\; \underline{x_3 = -\sqrt{3}}$$

Teniendo en cuenta que la $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-1}$ continua en su dominio y que es simétrica con respecto al origen, por ser f(-x) = - f(x), los intervalos de crecimiento y decrecimiento se obtienen como sigue:

Observando la expresión de la derivada $f'(x) = \frac{2x^2 \cdot (x^2-3)}{(x^2-1)^2}$, su signo depende, exclusivamente, del valor de la expresión (x^2-3), o sea, la derivada es positiva o negativa cuando lo sea (x^2-3): $|x| < \sqrt{3} \Rightarrow f'(x) < 0 \;;;\; |x| > \sqrt{3} \Rightarrow f'(x) > 0$.

$$\underline{\underline{Decreciente \Rightarrow f'(x) < 0,\ \forall x \in (-\sqrt{3},\ -1) \cup (-1,\ 1) \cup (1,\ \sqrt{3})}}$$

$$\underline{\underline{Creciente \Rightarrow f'(x) > 0,\ \forall x \in (-\infty,\ -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3},\ +\infty)}}$$

Existe un máximo relativo para los valores reales de x que anulan la primera derivada y hacen negativa a la segunda derivada y, existe un mínimo relativo para los valores reales de x que anulan la primera derivada y hacen positiva a la segunda derivada.

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2) \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = 2 \cdot \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1) - 4x(x^4 - 3x^2)}{(x^2-1)^3} =$$

$$= 2 \cdot \frac{4x^5 - 4x^3 - 6x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{(x^2-1)^3} = 2 \cdot \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3} = \underline{\frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = f''(x)}$$

$$f''(0)=\frac{0}{(-1)^3}=0 \Rightarrow \underline{Ni\ \ máximo\ \ ni\ \ mínimo\ \ relativo\ \ para\ \ x=0}$$

$$f''\left(\sqrt{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}(3+3)}{(3-1)^3}=\frac{24\sqrt{3}}{8}=3\sqrt{3}>0 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo\ \ relativo\ \ para\ \ x=\sqrt{3}}}$$

$$f''\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{-4\sqrt{3}(3+3)}{(3-1)^3}=\frac{-24\sqrt{3}}{8}=-3\sqrt{3}<0 \Rightarrow \underline{\underline{Máximo\ \ relativo\ \ para\ \ x=-\sqrt{3}}}$$

****

2º) Considerad el sistema de ecuaciones siguiente: $\left.\begin{array}{l} x+5y+z+a=0 \\ (a-2)z+x+2y-1=0 \\ (a-1)y+(1-a)x+z+a+2=0 \end{array}\right\}$:

a) Explicad, razonadamente, si se trata de un sistema lineal homogéneo.

b) Construid la matriz de coeficientes y la matriz ampliada.

c) Hallad los valores del parámetro α para los cuales el sistema no es compatible determinado, y estudiad el carácter del sistema en cada uno de esos casos.

d) Resolvedlo solamente cuando el conjunto de sus soluciones es una recta de R^3.

----

a)

Un sistema homogéneo es aquel en el que carecen de término independiente todas las ecuaciones que lo componen.

El sistema puede expresarse de la siguiente forma: $\begin{cases} x+5y+z=-a \\ x+2y+(a-2)z=1 \\ (1-a)x+(a-1)y+z=-a-2 \end{cases}$,

que como puede apreciarse, no es un sistema homogéneo.

b)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & a-2 \\ 1-a & a-1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad M'=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & -a \\ 1 & 2 & a-2 & 1 \\ 1-a & a-1 & 1 & -a-2 \end{pmatrix}$$

c)

Según el Teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible determinado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e iguales al número de incógnitas.

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & a-2 \\ 1-a & a-1 & 1 \end{vmatrix}=2+a-1+5(a-2)(1-a)-2(1-a)-(a-1)(a-2)-5=$$

$$=a-4-5(a-2)(a-1)-2+2a-(a-1)(a-2)=3a-6-6(a-2)(a-1)=$$

$$=3a-6-6\left(a^2-a-2a+2\right)=3a-6-6a^2+18a-12=-6a^2+21a-18=0\ ;;\ 2a^2-7a+6=0.$$

$$a=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{4}=\frac{7\pm 1}{4}\ \Rightarrow\ \underline{a_1=2}\ ;;\ \underline{a_2=\frac{3}{2}}.$$

$$\underline{\underline{El\ \ sistema\ \ no\ \ es\ \ compatible\ \ determinado\ \ para\ \ a=2\ \ y\ \ para\ \ a=\frac{3}{2}}}$$

Para a = 2 las matrices son $M=\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix}1 & 5 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -4\end{pmatrix}$.

Rango M = 2 $\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}\neq 0$.

$$Rango\ \ M'\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\{C_1,\ C_2,\ C_4\}\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 5 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -4\end{vmatrix}=-8-2-5-4-1+20=0\\ \{C_1,\ C_3,\ C_4\}\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -4\end{vmatrix}=-2-1-1+4=0\\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\}\Rightarrow \begin{vmatrix}5 & 1 & -2\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -4\end{vmatrix}=-4+1-5+8=0\end{array}\right\}\Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=2}.$$

(Nótese que $F_1 = 2F_2 + F_3$)

$$\underline{\underline{Para\ \ a=2\ \Rightarrow\ Rango\ \ M=Rango\ \ M'=2<n^{o}\ \ incógnitas\ \Rightarrow\ Compatible\ \ Indeterminado}}$$

Para $a=\frac{3}{2}$ las matrices son $M=\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ 1 & 2 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix}1 & 5 & 1 & -\frac{3}{2}\\ 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{7}{2}\end{pmatrix}$.

Rango M = 2 $\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}\neq 0$.

$$Rango\ \ M'\ \Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 5 & 1 & -\frac{3}{2}\\ 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{7}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{8}\cdot\begin{vmatrix}2 & 10 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 2 & -7\end{vmatrix}\Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}2 & 10 & -3\\ 2 & 4 & 2\\ -1 & 1 & -7\end{vmatrix}=-56-6-20-12-4+140=140-96=44\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a = \frac{3}{2} \Rightarrow Rango \;\; M = 2 \;\; ;; \;\; Rango \;\; M' = 3 \Rightarrow Incompatible}}$$

d)

El sistema cuando es compatible indeterminado y se cortan en una recta cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son los dos iguales a dos; es decir: que uno de los planos es combinación lineal de los otros dos y, en realidad, es la recta que determinan dos planos al cortarse por poderse eliminar uno cualquiera de ellos.

Como hemos visto en el apartado c), las matrices tienen rango dos para α = 2; el sistema resulta $\left.\begin{array}{l} x+5y+z=-2 \\ x+2y=1 \\ -x+y+z=-4 \end{array}\right\}$. Despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la 2ª y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo la z, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} x+5y+z=-2 \\ x+2y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+5y=-2-\lambda \\ x+2y=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+5y=-2-\lambda \\ -x-2y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=-3-\lambda \;\; ;; \;\; \underline{y=-1-\frac{1}{3}\lambda}$$

$$x = 1-2y = 1+2+\frac{2}{3}\lambda = \underline{3+\frac{2}{3}\lambda = x}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x = 3+\frac{2}{3}\lambda \\ y = -1-\frac{1}{3}\lambda \quad \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

****