PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

JUNIO – 2004

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

A continuación encontrarás el enunciado de cuatro cuestiones y dos problemas. Tienes que responder a tres de las cuatro cuestiones y resolver uno de los dos problemas (puedes elegir las cuestiones y el problema que quieras). En las respuestas has de explicar en que te basas y por qué. La puntuación de cada cuestión son dos puntos y el problema cuatro puntos.

OPCIÓN A

CUESTIONES

1ª) Considerar la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$.

a) Calcular la ecuación de la recta r, tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = 3.

b) ¿Existe alguna otra recta tangente a la gráfica de f(x) que sea paralela a la anterior? Razonar la respuesta y, en caso afirmativo, determinar su ecuación.

----

a)

$$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 = 27 - 27 + 6 + 2 = 8 \Rightarrow \underline{P(3,\ 8)}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \Rightarrow f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 2 = 27 - 18 + 2 = \underline{11 = m}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow r \equiv y - 8 = 11(x - 3) = 11x - 33 \Rightarrow Tangente \Rightarrow \underline{\underline{r \equiv 11x - y - 25 = 0}}$$

b)

Para que exista una recta s, paralela a r, tiene que tener su misma pendiente:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 11 \ ;; \ 3x^2 - 6x - 9 = 0 \ ;; \ x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = 3} \rightarrow (Valor\ \ para\ \ la\ \ recta\ \ r) \\ \underline{x_2 = -1} \end{cases}$$

$$f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)+2=-1-3-2+2=-4 \quad \Rightarrow \quad \underline{Q(-1,\ -4)}$$

$$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow s\equiv y+4=11(x+1)=11x+11\Rightarrow Tangente \ \Rightarrow \ \underline{\underline{s\equiv 11x-y+7=0}}$$

****

2ª) Dada la función $f(x)=\cos x-\cos^3 x$:

a) Calcular su integral indefinida.

b) ¿Cuál es la función primitiva de f(x) que pasa por el punto $P\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$?

----

a)

$$F(x)=\int\left(\cos x-\cos^3 x\right)dx=\int\cos x\left(1-\cos^2 x\right)dx=\int sen^2 x\cdot\cos x\cdot dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}sen\ x=t\\ \cos x\cdot dx=dt\end{matrix}\right\}\Rightarrow\int t^2\cdot dt=\frac{t^3}{3}+C=\underline{\underline{\frac{1}{3}sen^3 x+C=F(x)}}$$

b)

Para que la función primitiva de f(x), F(x) pase por $P\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ tiene que ser: $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$:

$$F(x)=\frac{1}{3}sen^3 x+C\ \Rightarrow\ F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}sen\ \left(\frac{\pi}{2}\right)+C=0\ ;;\ \frac{1}{3}\cdot sen^3 90^{\circ}+C=0\ ;;\ \frac{1}{3}\cdot 1^3+C=0\ ;;$$

$$\frac{1}{3}+C=0\ ;;\ C=-\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ F(x)=\frac{1}{3}sen^3 x-\frac{1}{3}=\underline{\underline{\frac{1}{3}\left(sen^3 x-1\right)=F(x)}}$$

****

3ª) Se considera la función $f(x)=1+\frac{a}{x}+\frac{6}{x^2}$, siendo a un parámetro.

a) Calcular el valor del parámetro a sabiendo que f(x) tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = 3.

b) ¿El extremo relativo calculado, es máximo o mínimo? Razonar la respuesta.

----

a)

$$f(x)=1+\frac{a}{x}+\frac{6}{x^2}=\frac{x^2+ax+6}{x^2} \Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{(2x+a)\cdot x^2-(x^2+ax+6)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2x^2+ax-2x^2-2ax-12}{x^3}=\underline{\frac{-ax-12}{x^3}=f'(x)}$$

$$f'(3)=0 \Rightarrow f'(3)=\frac{-3a-12}{3^3}=0 \Rightarrow -3a-12=0 \;;;\; a+4=0 \;;;\; \underline{\underline{a=-4}}$$

b)

La condición de f’(x) = 0 es necesaria pero no suficiente. Para diferenciar si se trata de un máximo o de un mínimo relativo tenemos que recurrir a la segunda derivada; si f’’(x) > 0 se trata de de un mínimo relativo y si f’’(x) < 0 se trata de de un máximo.

Para a = -4 es $f'(x)=\frac{4x-12}{x^3}$.

$$f''(x)=\frac{4\cdot x^3-(4x-12)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{4-3(4x-12)}{x^4}=\frac{4-12x+48}{x^4}=\underline{\frac{52-12x}{x^4}=f''(x)}$$

$$f''(3)=\frac{52-12\cdot 3}{3^4}=\frac{52-36}{81}=\frac{12}{81}>0 \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Se trata de un Mínimo relativo}}}$$

****

4ª) Se consideran los puntos del espacio A(1, 1, 0), B(0, 1, 2) y C(-1, 2, 1). Nos dicen que estos puntos forman parte del conjunto de soluciones de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Se pide:

a) ¿Están alineados los puntos?

b) ¿Podemos saber el rango de la matriz del sistema de ecuaciones?
Razonar adecuadamente las respuestas.

----

a)

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 1,\ 2) - (1,\ 1,\ 0) = (-1,\ 0,\ 2) \\ \\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (-1,\ 2,\ 1) - (1,\ 1,\ 0) = (-2,\ 1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{u} \neq k \cdot \overrightarrow{v}} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} Linealmente \\ independientes \end{array}\right\}$$

<u>Los puntos A, B y C no están alineados</u>

b)

Sabiendo que el sistema es compatible indeterminado, según el teorema de Rouché-Fröbenius, el rango tiene que ser menor que tres.

Al ser los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ linealmente independientes, su rango es dos. Por otra parte, los tres puntos determinan un plano, lo cual significa que tienen dos grados de libertad (rango dos).

<u>Resumen: los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada del sistema es 2.</u>

****

PROBLEMAS

1º) Dado el sistema: $\left.\begin{array}{r} y+z=2 \\ -2x+y+z=-1 \\ (2-2m)x+(2m-2)z=m-1 \end{array}\right\}$ donde m es un parámetro:

a) Discutir el sistema según los valores de m.

b) Resolverlo en los casos que sea compatible.

c) En cada caso de la discusión del apartado a), hacer una interpretación geométrica del sistema.

----

a)

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2-2m & 0 & 2m-2 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2-2m & 0 & 2m-2 & m-1 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2-2m & 0 & 2m-2 \end{vmatrix}=2-2m-2+2m+2(2m-2)=4(m-1)=0 \;\Rightarrow\; m=1$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m\neq 1 \;\Rightarrow\; Rango\, M = Rango\ \ M' = 3 = n^{o}\ \ incógnitas \;\Rightarrow\; Compatible\ \ determinado}}$$

$$Para\ \ m=1\ \ resulta\ \ M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \underline{Rang\ \ M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m=1 \;\Rightarrow\; Rango\, M = Rango\ \ M' = 2 < n^{o}\ \ incógnitas \;\Rightarrow\; Compatible\ \ indeterminado}}$$

b) Vamos a resolver ahora el caso en que es compatible indeterminado, para m = 1:

El sistema resultante es: $\left.\begin{array}{r} y+z=2 \\ -2x+y+z=-1 \end{array}\right\}$ *Haciendo* $\underline{z=\lambda}$:

$\underline{y=2-\lambda}$;; $-2x+2-\lambda+\lambda=-1$;; $2x=3$;; $\underline{x=1'5}$

$$\underline{\underline{Solución:\ \begin{cases} x=1'5 \\ y=2-\lambda \quad \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

c)

$$\underline{\underline{Para\ \ m \neq 1\ \ se\ \ trata\ \ de\ \ tres\ \ planos\ \ que\ \ se\ \ cortan\ \ en\ \ un\ \ punto.}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m = 1\ \ se\ \ trata\ \ de\ \ dos\ \ planos\ \ que\ \ se\ \ cortan.}}$$

****

2º) Se tienen los cuatro puntos del espacio: A(0, 0, 0), B(0, 0, 2), C(0, 2, 0) y D(2, 0, 0). Se pide:

a) Representar gráficamente los cuatro puntos.

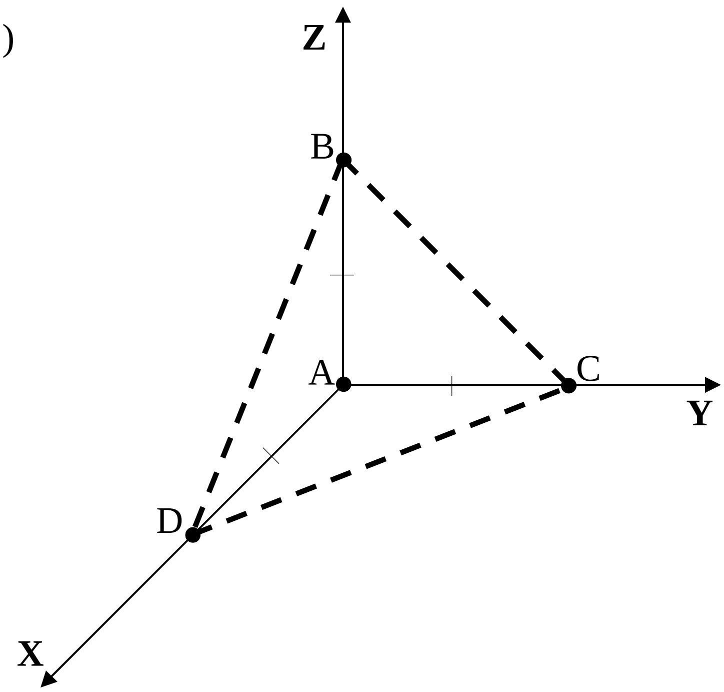
b) Calcular el volumen del tetraedro (pirámide de base triangular) ABCD.

c) Determinar la ecuación del plano π que pasa por B, C y D.

d) Calcular la distancia del origen de coordenadas al plano del apartado anterior.

----

a)



b) El volumen se puede determinar como una pirámide cuya base es un triángulo rectángulo de catetos iguales de 2 unidades y una altura de 2 unidades:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2 \cdot 2}{2} \right) \cdot 2 = \underline{\underline{\frac{4}{3}\ u^3 = V}}$$

c)

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BC} = C - B = (0,\ 2,\ 0) - (0,\ 0,\ 2) = (0,\ 2,\ -2)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BD} = D - B = (2,\ 0,\ 0) - (0,\ 0,\ 2) = (2,\ 0,\ -2)$$

$$\pi(B;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ \begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -x - y - (z-2) = 0\ ;;$$

$$-x - y - z + 2 = 0\ ;;\ \underline{\underline{\pi \equiv x + y + z - 2 = 0}}$$

d) Sabiendo que la distancia del origen a un plano es: $d = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, sería:

$$d(O,\ \pi) = d = \frac{-(-2)}{+\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}\ unidades = d}}$$

****

<u>OPCIÓN B</u>

<u>CUESTIONES</u>

1ª) La matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, reducida por el método de Gauss, es: $M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

a) ¿El sistema es compatible o incompatible? Razonar la respuesta.

b) En caso de ser compatible, resolverlo.

----

a)

El sistema es compatible indeterminado. Se trata de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas y los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son iguales a 2, que es menor que el número de incógnitas.

b)

Resulta el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=0 \\ y+2z=1 \end{array}\right\}$

Parametrizando la variable z:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=0 \\ y+2z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \underline{y=1-2\lambda} \;\;;;\;\; x+2-4\lambda-\lambda=0 \;\;;;\;\; \underline{x=-2+5\lambda}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=-2+5\lambda \\ y=1-2\lambda \qquad \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

2ª) Considerados los puntos A(0, 0, 1), B(1, 1, 2) y C(0, -1, -1).

a) Calcular la ecuación del plano π, que pasa por los puntos A, B y C.

b) Siendo D(k, 0, 0), ¿cuánto tiene que valer k para que los cuatro puntos sean coplanarios?

----

a)

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 1,\ 2) - (0,\ 0,\ 1) = (1,\ 1,\ 1)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ -1,\ -1) - (0,\ 0,\ 1) = (0,\ -1,\ -2)$$

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -2x - z + 1 + x + 2y = 0\ ;;\ \underline{\underline{\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0}}$$

b)

Para responder a este apartado, basta con hacer pertenecer el punto D al plano π hallado anteriormente:

$$D(k,\ 0,\ 0) \in \pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0\ \Rightarrow\ k - 0 + 0 - 1 = 0\ ;;\ \underline{\underline{k = 1}}$$

****

3ª) Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Encontrar una matriz X que satisfaga la siguiente ecuación matricial: A · X + A = B.

Sea la matriz pedida $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A \cdot X + A = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} 2a+c+2 & 2b+d+1 \\ a+c+1 & b+d+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{matrix} 2a+c+2=1 \\ a+c+1=2 \end{matrix}\right\} (1) \quad \left.\begin{matrix} 2a+c=-1 \\ a+c=1 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 2a+c=-1 \\ -a-c=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{a=-2}} \;;;\; \underline{\underline{c=3}} \\ \\ \left.\begin{matrix} 2b+d+1=2 \\ b+d+1=2 \end{matrix}\right\} (2) \quad \left.\begin{matrix} 2b+d=1 \\ b+d=1 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 2b+d=1 \\ -b-d=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{b=0}} \;;;\; \underline{\underline{d=1}} \end{cases}$$

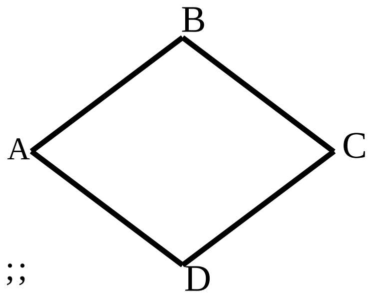
$$\underline{\underline{X=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}}$$

****

4ª) Los puntos del espacio A(k-3, 2, 4), B(0, k+2, 2) y C(-2, 6, k+1) son tres vértices consecutivos de un rombo ABCD. Se pide:

a) Calcular el valor de k.

b) Demostrar que el rombo es un cuadrado.



a)

Por tratarse de un rombo los lados son todos iguales, por lo tanto:

$$\overline{AB} = \overline{BC} \;\Rightarrow\; \sqrt{(-k+3)^2 + k^2 + 2^2} = \sqrt{(-2)^2 + (4-k)^2 + (k-1)^2} \;\;;;$$

$$9 - 6k + k^2 + k^2 + 4 = 4 + 16 - 8k + k^2 + k^2 - 2k + 1 \;\;;;\; 13 - 6k = 21 - 10k \;\;;;\; 4k = 8 \;\;;;\; \underline{\underline{k = 2}}$$

Otra forma de obtener el valor de k es el siguiente:

Sea el punto pedido D(x, y, z):

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,\; k+2,\; 2) - (k-3,\; 2,\; 4) = (3-k,\; k,\; -2)$$

$$\overrightarrow{DC} = C - D = (-2,\; 6,\; k+1) - (x,\; y,\; z) = (-2-x,\; 6-1,\; k+1-z)$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} 3-k=-2-x \\ k=6-y \\ -2=k+1-z \end{array}\right\} \;;;\; \left\{\begin{array}{l} x=-5+k \\ y=6-k \\ z=3+k \end{array}\right. \qquad (1)$$

Por tratarse de un rombo, se cumple que $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-2,\; 6,\; k+1) - (k-3,\; 2,\; 4) = (1-k,\; 4,\; k-3)$$

$$\overrightarrow{BD} = D - B = (x,\; y,\; z) - (0,\; k+2,\; 2) = (x,\; y-k-2,\; z-2)$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \;\Rightarrow\; (1-k,\; 4,\; k-3) \cdot (x,\; y-k-2,\; z-2) = 0$$

$$x - kx + 4y - 4k - 8 + kz - 2k - 3z + 6 = 0 \;\;;;\; x + 4y - 3z - kx + kz - 6k - 2 = 0$$

Sustituyendo los valores de x, y, z queda:

$$(-5+k)+4(6-k)-3(3+k)-k(-5+k)+k(3+k)-6k-2=0 \;\; ;;$$

$$-5+k+24-4k-9-3k+5k-k^2+3k+k^2-6k-2=0 \;\; ;; \;\; 8-4k=0 \;\; ;; \;\; \underline{\underline{k=2}}$$

b)

Para k = 2 los puntos resultan ser: A(-1, 2, 4), B(0, 4, 2), C(-2, 6, 3) y D(-3, 4, 5).

Para demostrar que se trata de un cuadrado, basta probar que las diagonales son iguales, o sea:

$$\overline{AC}=\overline{BD} \;\Rightarrow\; \sqrt{(-2+1)^2+(6-2)^2+(3-4)^2}=\sqrt{(-3-0)^2+(4-4)^2+(5-2)^2} \;\; ;;$$

.

$$(-1)^2+4^2+(-1)^2=(-3)^2+0^2+3^2 \;\; ;; \;\; 1+16+1=9+9 \;\; ;; \;\; 18=18 \Rightarrow \underline{\underline{\overline{AC}=\overline{BD}, \;\; c.q.p.}}$$

****

PROBLEMAS

1º) Considerar la función: $f(x) = x^3 + mx^2 + 1$, siendo $m \geq 0$.

a) Calcular el valor de m para que el área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje X y las rectas x = 0 y x = 2 sea de 10 unidades cuadradas.

b) Para m = 1, indicar el punto o los puntos en que la recta tangente a la gráfica de la función forma un ángulo de 45º con el semieje positivo OX.

----

a)

En el intervalo (0, 2) se cumple que para $m > 0$: $f(x) > 0,\ \forall x \in (0,\ 2)$.

$$A = \int_0^2 \left(x^3 + mx^2 + 1\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{mx^3}{3} + x\right]_0^2 = \left(\frac{16}{4} + \frac{8m}{3} + 2\right) - 0 = 10 \ \ ;;\ \ 6 + \frac{8m}{3} = 10 \ \ ;;$$

$$18 + 8m = 30 \ \ ;;\ \ 8m = 12 \ \ ;;\ \ 2m = 3 \ \ ;;\ \ \underline{\underline{m = \frac{3}{2}}}$$

b)

Para m = 1 resulta la función: $f(x) = x^3 + x^2 + 1$.

Teniendo en cuenta que la pendiente (m) de una función en un punto es la derivada de la función en ese punto y que la tag 45º = 1, hacemos:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x = m = 1 \ \ ;;\ \ 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = \frac{1}{3}} \\ \underline{x_2 = -1} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + 1 = \frac{1+3+27}{27} = \frac{31}{27} \ \Rightarrow \ \underline{T_1\left(\frac{1}{3},\ \frac{31}{27}\right)} \\ \\ f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 1 = -1 + 1 + 1 = 1 \ \Rightarrow \ \underline{T_2(-1,\ 1)} \end{array}\right\}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow \begin{cases} t_1 \equiv y - \dfrac{31}{27} = 1\left(x - \dfrac{1}{3}\right) \ ;; \ 27y - 31 = 27x + 9 \ ;; \ \underline{\underline{t_1 \equiv 27x - 27y + 40 = 0}} \\ \\ t_2 \equiv y + 1 = 1(x - 1) \ ;; \ y + 1 = x - 1 \ ;; \ \underline{\underline{t_2 \equiv x - y - 2 = 0}} \end{cases}$$

****

2º) Dadas la función $f(x)=\sqrt{x}$ y el punto P(2, 0) situado sobre el eje de abscisas:

a) Determinar la función que expresa la distancia del punto P a cualquier punto de la gráfica de la función.

b) Calcular las coordenadas del punto de la gráfica de f(x) más próximo a P.

----

a)

Todos los puntos de f(x) son de la forma: $Q(x,\ \sqrt{x})$.

La distancia entre un punto genérico Q y P es la siguiente:

$$d(P,\ Q)=\sqrt{(x-2)^2+\left(\sqrt{x}-0\right)^2}=\sqrt{x^2-4x+4+x}=\underline{\underline{\sqrt{x^2-3x+4}=d(P,\ Q)}}$$

b)

$d(P,\ Q)$ es mínima cuando su derivada sea cero:

$$d'(P,\ Q)=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}}=0\ \Rightarrow\ 2x-3=0\ ;;\ \underline{x=\frac{3}{2}}$$

$$f\left(\tfrac{3}{2}\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}\quad\Rightarrow\ \underline{\underline{Q\left(\tfrac{3}{2},\ \tfrac{\sqrt{6}}{2}\right)}}$$

****