PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

JUNIO – 2001

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

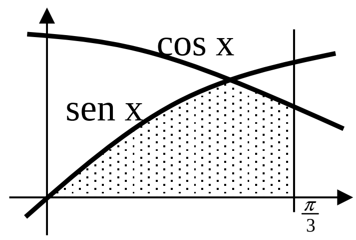
MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

A continuación encontrarás el enunciado de cuatro cuestiones y dos problemas. Tienes que responder sólo a tres de las cuatro cuestiones y resolver sólo uno de los dos problemas (puedes elegir las cuestiones y el problema que quieras). En las respuestas has de explicar en que te basas y por qué.

CUESTIONES

1ª) a) ¿Cuál es el ángulo x en radianes $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ tal que sen x = cos x?

b) Considera las funciones f(x) = sen x y g(x) = cos x. Calcula la superficie del recinto limitado superiormente por las gráficas de estas funciones, inferiormente por el eje de abscisas y lateralmente por las rectas verticales x = 0 y $x = \frac{\pi}{3}$, representadas en el esquema adjunto.



----

a)

De la fórmula fundamental de trigonometría:

$$sen^2\ x + \cos^2\ x = 1\ ;;\ sen^2\ x + sen^2\ x = 1\ ;;\ 2\,sen^2\ x = 1\ ;;\ sen^2\ x = \frac{1}{2}\ ;;\ sen\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \underline{\pm\frac{\sqrt{2}}{2} = sen\ x = \cos\ x} \quad \Rightarrow \quad x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad x = arc\ sen\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}\ radianes = x}}$$

b)

El punto de corte es $x = \frac{\pi}{4}$, con lo cual el área pedida es la siguiente:

$$S=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} sen\ x\cdot dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos\ x\cdot dx=\left[-\cos\ x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}+\left[sen\ x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\left[\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\cos\ 0\right)\right]+\left(sen\ \frac{\pi}{3}-sen\ \frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}+\cos\ 0+sen\ \frac{\pi}{3}-sen\ \frac{\pi}{4}=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\underline{\underline{\frac{2+\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2}\ u^2\cong 0'32\ u^2=S}}$$

****

2ª) La circunferencia c pasa por el punto A(4, 0) y es tangente a la recta y = x en el punto B(4, 4).

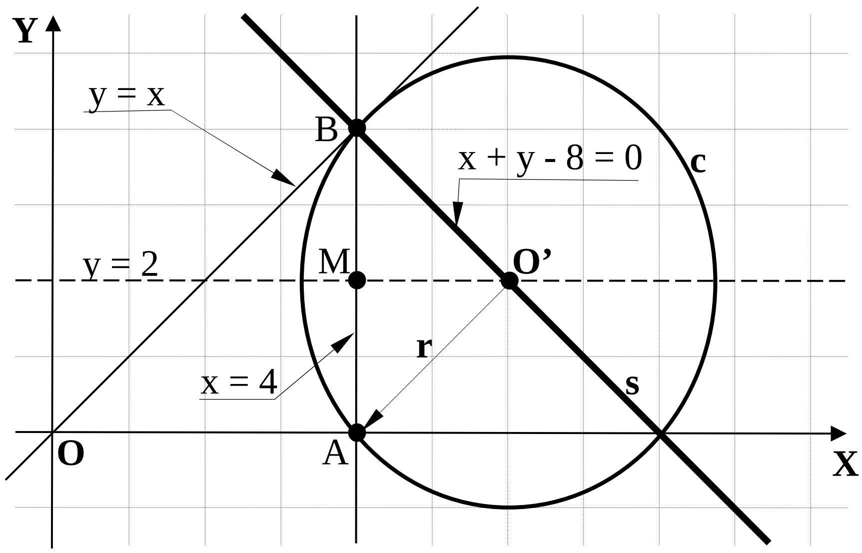
a) Determina la ecuación de la recta s que pasa por el punto B y por el centro de la circunferencia.

b) Encuentra el centro de c y calcula su radio.

----

a)

La situación gráfica de la situación se expresa en la figura.



Sabiendo que la perpendicular a la tangente a una circunferencia por su punto de tangencia pasa por el centro de la circunferencia y que las rectas perpendiculares tienen las pendientes inversas y de signos contrarios, la recta r pedida pasa por el punto B(4, 4) y tiene de pendiente m = -1.

La recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$$r \equiv y - 4 = -1(x - 4) \;\; ;; \;\; y - 4 = -x + 4 \;\; ;; \;\; \underline{\underline{r \equiv x + y - 8 = 0}}$$

b)

El punto medio del segmento AB es: $M \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_m = \frac{4+4}{2} = 4 \\ y_m = \frac{4+0}{2} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{M(4,\ 2)}$.

La recta perpendicular al segmento AB (que es vertical) por el punto M es la recta horizontal y = 2.

El centro de la circunferencia es la intersección de las rectas r e y = 2:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 8 = 0 \\ y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 2 - 8 = 0 \;\; ;; \;\; x = 6 \Rightarrow \underline{\underline{O'(6,\ 2)}}.$$

El radio de la circunferencia es, por ejemplo, la longitud del segmento O'A:

$$r = \overline{O'A} = \sqrt{(4-6)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2 \cdot 2^2} = \underline{\underline{2\sqrt{2}\ unidades = r}}$$

****

3ª) Dados los puntos del espacio A(2, 0, 0), B(0, 1, 0) y C(0, 0, 3).

a) Determina la ecuación del plano π que los contiene.

b) Calcula la ecuación de la recta r perpendicular al plano π y que pasa por el origen.

----

a)

La ecuación general del plano π es la siguiente:

$$\pi \Rightarrow \begin{Bmatrix} A(2,\ 0,\ 0) \\ B(0,\ 1,\ 0) \\ C(0,\ 0,\ 3) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 1,\ 0) - (2,\ 0,\ 0) = \underline{(-2,\ 1,\ 0)} \\ \\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 0,\ 3) - (2,\ 0,\ 0) = \underline{(-2,\ 0,\ 3)} \end{cases}$$

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 3(x-2) + 2z + 6y = 0 \ ;;\ 3x - 6 + 2z + 6y = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 3x + 6y + 2z - 6 = 0}}$$

b)

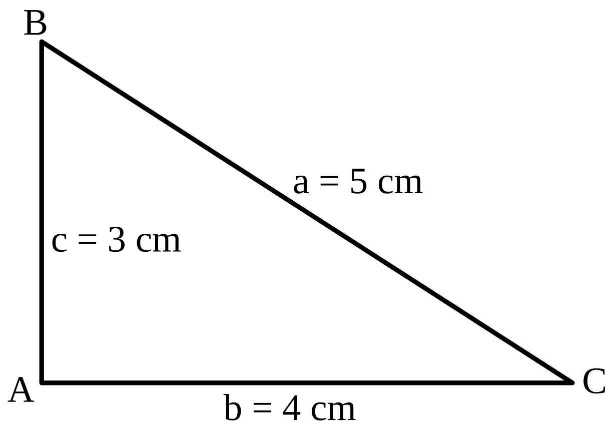
Todas las rectas perpendiculares al plano π tienen como vector director al vector normal al plano π, que es $\overrightarrow{n} = (3,\ 6,\ 2)$.

La recta r es la que pasa por O(0, 0, 0) y tiene como vector director a $\overrightarrow{n}$; su expresión, por ejemplo, por unas ecuaciones continua es la siguiente:

$$\underline{\underline{r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y}{6} = \frac{z}{2}}}$$

****

4ª) Los tres lados de un triángulo miden 3 cm, 4 cm y 5 cm. Calcula sus ángulos y su área.



A primera vista se observa que los tres números son pitagóricos, por lo cual el triángulo es rectángulo.

No obstante lo anterior, vamos a resolver el ejercicio como si se tratase de un triángulo cualquiera.

Aplicando el teorema del coseno:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{25 + 9 - 16}{30} = \frac{34 - 16}{30} =$$

$$= \frac{18}{30} = 0'6000 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{B = 53^{\circ}\ 7'\ 48''}}$$

Aplicando ahora el Teorema de los Senos:

$$\frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C} \quad \Rightarrow \quad sen\ C = \frac{c \cdot sen\ B}{b} = \frac{3 \cdot sen\ 53^{\circ}\ 7'\ 48''}{4} = \frac{3 \cdot 0'8000}{4} = 0'6000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{C = 36^{\circ}\ 52'\ 12''}}$$

$$A = 180^{\circ} - (B + C) = 180^{\circ} - 90^{\circ} = \underline{\underline{90^{\circ} = A}}$$

El área de un triángulo cualquiera es un medio del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman:

$$Área = S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sen\ C = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 0'6 = \underline{\underline{6\ u^2 = S}}$$

****

PROBLEMAS

1º) Hemos de hacer un mapa de una cierta zona geográfica. A, B y C son la cima de tres montañas de la misma altura, de manera que las posiciones de A y B son conocidas y ya están representadas en el mapa, mientras que la posición de C se ha de determinar. Nos situamos en A y medimos el ángulo entre la línea A – B y la línea A – C, que es de 68º. Nos situamos en B y aquí medimos el ángulo entre las líneas B – C y B – A, que resulta ser de 35º. En el mapa que tenemos, la distancia sobre el papel entre A y B es de 3 cm.

a) Haz un diagrama de la situación y determina cuál es el ángulo que forman las líneas C – A y C – B.

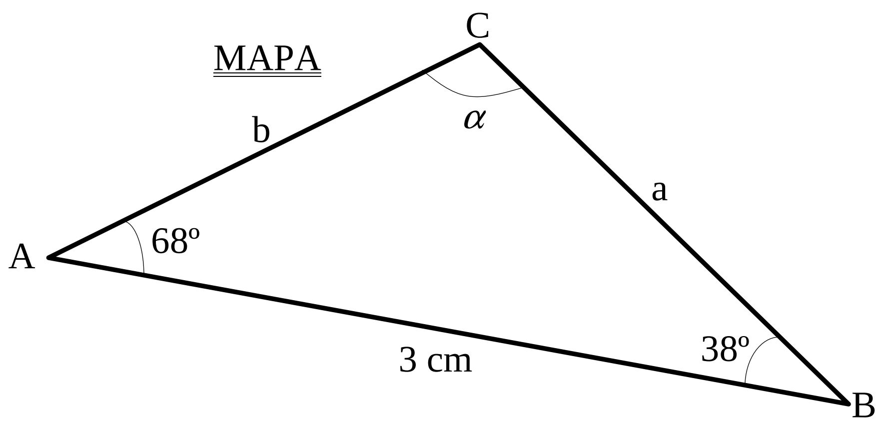
b) ¿Cuáles serán, sobre el mapa, las distancias entre A y C y entre B y C?

c) Si el mapa es a escala 1 : 50.000, calcula la distancia real entre los puntos A, B y C.

----

a)

El diagrama de la situación es el que indica la figura.



Las líneas C – A y C – B forman el ángulo α, cuyo valor es el siguiente:

$$\alpha = 180º - (A + B) = 180º - (68º + 38º) = 180º - 106º = \underline{\underline{76º = \alpha}}$$

b)

Para determinar las distancias C – A y C – B, equivalentes a b y c, respectivamente, recurrimos al teorema de los senos:

$$\frac{b}{sen\ B} = \frac{3}{sen\ C} \Rightarrow b = \frac{3 \cdot sen\ B}{sen\ C} = \frac{3 \cdot sen\ 38º}{sen\ 76º} = \frac{3 \cdot 0'6157}{0'9703} = \frac{1'8670}{0'9703} = \underline{\underline{1'90\ \ cm = C - A}}$$

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{3}{sen\ C} \Rightarrow a = \frac{3 \cdot sen\ A}{sen\ C} = \frac{3 \cdot sen\ 68º}{sen\ 76º} = \frac{3 \cdot 0'9272}{0'9703} = \frac{2'7816}{0'9703} = \underline{\underline{2'86\ \ cm = C - B}}$$

c)

$$Escala = \frac{Medida\ \ del\ \ mapa}{Medida\ \ real} = \frac{1}{50.000} \Rightarrow \underline{Medida\ \ real = 50.000 \cdot Medida\ \ del\ \ mapa}$$

$$Medida\ \ real\ \ C - A = 50.000 \cdot 1'90 = 95.000\ cm = \underline{\underline{950\ \ metros = C - A \rightarrow \mathrm{Re}\,al}}$$

$$Medida\ \ real\ \ C - B = 50.000 \cdot 2'86 = 143.000\ cm = \underline{\underline{1.430\ \ metros = C - B \rightarrow \mathrm{Re}\,al}}$$

****

2º) Considera la función $f(x)=\frac{x^2-2x}{2x^2+1}$.

a) Determina sus asíntotas.

b) Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos relativos.

c) De acuerdo con los resultados obtenidos, dibuja aproximadamente su gráfica.

d) Fijándote en la gráfica anterior, explica cual sería la gráfica de la siguiente función: $g(x)=-f(x)+3$ (haz un esquema). ¿En qué punto tiene el máximo la función g(x)?

----

a)

Asíntotas horizontales: Son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más y menos infinito:

$$y = f(x)=k=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x}{2x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x}{2x^2+1}=\underline{\underline{\frac{1}{2}=y}}$$

Asíntotas verticales: Son los valores reales de x que anulan el denominador:

$$2x^2+1=0 \;\Rightarrow\; x\notin R \;\Rightarrow\; \underline{\underline{No\ tiene\ \ asíntotas\ \ verticales.}}$$

Asíntotas oblicuas: Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador. En el caso que nos ocupa, no tiene asíntotas oblicuas.

b)

$$f'(x)=\frac{(2x-2)\cdot(2x^2+1)-(x^2-2x)\cdot 4x}{(2x^2+1)^2}=\frac{4x^3+2x-4x^2-2-4x^3+8x^2}{(2x^2+1)^2}=\frac{4x^2+2x-2}{(2x^2+1)^2}=$$

$$=\underline{\frac{2(2x^2+x-1)}{(2x^2+1)^2}=f'(x)}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{2(2x^2+x-1)}{(2x^2+1)^2}=0\ ;;\ 2x^2+x-1=0\ ;;$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4}\;\Rightarrow\;\underline{x_1=-1}\ ;;\ \underline{x_2=\frac{1}{2}}$$

Como el denominador de la función es siempre positivo $\left[(2x^2+1)^2 > 0,\ \forall x \in R\right]$, para estudiar el signo de la derivada solamente consideramos el numerador, para lo cual tomamos un valor sencillo de uno de los intervalos en que dividen el dominio de la función (que es el conjunto de los números reales) los valores que anulan la derivada, por ejemplo, el valor x = 0: $f'(0) = \frac{2 \cdot (-1)}{1^2} = \frac{-2}{1} = -2 < 0$.

$$f'(x) > 0 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{\mathit{Creciente}\ \Rightarrow\ (-\infty,\ -1) \cup \left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)}}$$

$$f'(x) < 0 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{\mathit{Decreciente}\ \Rightarrow\ \left(-1,\ \frac{1}{2}\right)}}$$

$$f''(x) = \frac{2(4x+1) \cdot (2x^2+1)^2 - 2(2x^2+x-1) \cdot 2(2x^2+1) \cdot 4x}{(2x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{(8x+2) \cdot (2x^2+1) - 16x \cdot (2x^2+x-1)}{(2x^2+1)^3} = \frac{16x^3+8x+4x^2+2-32x^3-16x^2+16x}{(2x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{-16x^3-12x^2+24x+2}{(2x^2+1)^3} = \underline{\frac{-2(8x^3+6x^2-12x-1)}{(2x^2+1)^3} = f''(x)}$$

$$f''(-1) = \frac{-2 \cdot (-8+6+12-1)}{(2+1)^3} = \frac{-2 \cdot (9)}{3^3} = -\frac{18}{27} < 0 \ \Rightarrow\ \underline{\mathit{Máximo\ \ relativo\ \ para}\ \ x = -1}$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 - 2 \cdot (-1)}{2 \cdot (-1)^2 + 1} = \frac{1+2}{2+1} = 1 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{\mathit{Máximo}:\ A(-1,\ 1)}}$$

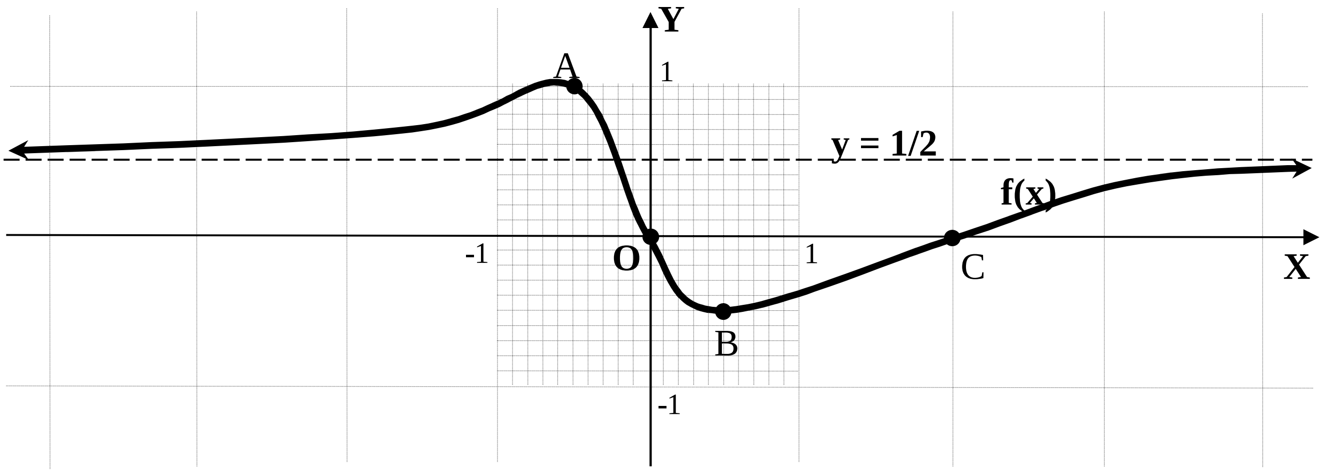
$$f''\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{-2 \cdot \left[8 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + 6 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 12 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right) - 1\right]}{\left[2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1\right]^3} = \frac{-2 \cdot \left(1 + \frac{3}{2} - 6 - 1\right)}{\left(\frac{1}{2}+1\right)^3} = \frac{-2 \cdot \left(\frac{3}{2} - 6\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} =$$

$$= \frac{-3+12}{\frac{27}{8}} = \frac{9 \cdot 8}{27} = \frac{8}{3} > 0 \ \Rightarrow\ \underline{\mathit{Mínimo\ \ relativo\ \ para}\ \ x = \frac{1}{2}}$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)}{2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{4} - 1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1-4}{2+4} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \underline{\underline{\mathit{Mínimo}:\ B\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)}}$$

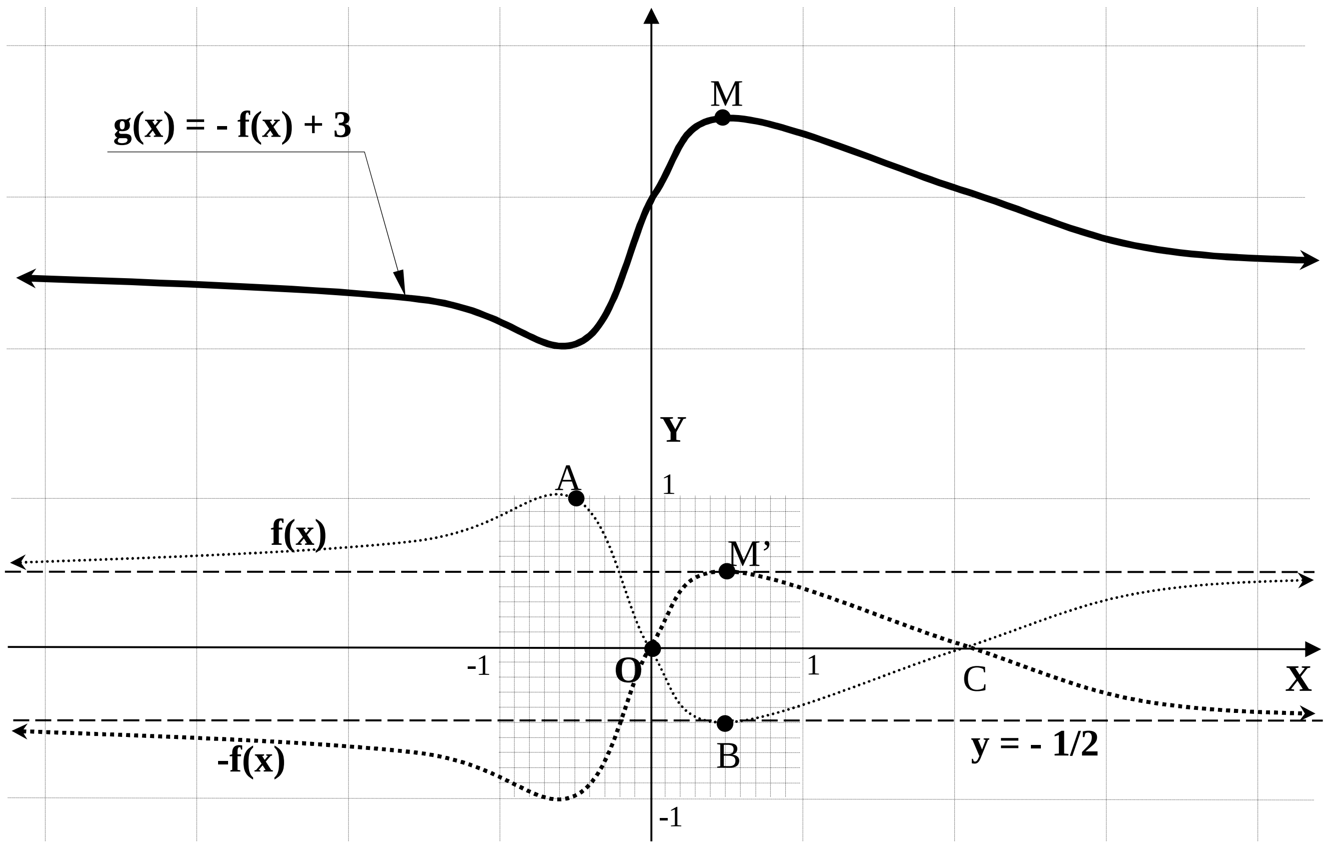
c)

La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la siguiente, teniendo en cuenta lo anterior y que corta a los ejes en los puntos O(0, 0) y C(2, 0):



d)

Sabiendo que la función $-f(x)$ es simétrica de la función $f(x)$ con respecto al eje de abscisas y que la función $f(x)+3$ es una función equivalente a $f(x)$, aumentando las ordenadas tres unidades, la función $g(x)=-f(x)+3$ es la indicada en el grafico siguiente:



El punto máximo de la función –f(x) es $M'\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ y el de g(x) es $M\left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\right)$.

****