# PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

# UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

# JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Considere las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, donde $a$ es un número real.

$a$) Determine el valor de $a$ de manera que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$.

$b$) Determine el valor de $a$ de manera que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, siendo $M^{-1}$ la matriz inversa de $M$. Es decir, $M \cdot M^{-1} = I$, siendo $I$ la matriz identidad de orden 2.

----------

$a$)

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a^2 & 2a \\ -2a & -a^2 \end{pmatrix}.$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4-a^2 & 2a \\ -2a & -a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4-a^2 = 3 \\ a^2 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = 1.$

$$\underline{M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix} \; para\ a = -1 \ y \ para\ a = 1.}$$

$b$)

$$M \cdot M^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = I;\ \begin{pmatrix} -a & 2+2a \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = -1.$

$$\underline{M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \; para\ a = -1.}$$

**********

2º) Considere la función $f(x)=\frac{x^2}{x-a}$, donde $a$ es un parámetro real.

$a$) Busque para qué valores del parámetro $a$ la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x=1$ es paralela a la recta $y+3x+5=0$.

$b$) Para el valor del parámetro $a=1$, encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos donde alcanza los máximos y mínimos relativos de la función $f$.

----------

$a$)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

La pendiente de la recta $y+3x+5=0$ es $y=-3x-5 \Rightarrow m=-3$.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x-a)-x^2\cdot 1}{(x-a)^2}=\frac{2x^2-2ax-x^2}{(x-a)^2}=\frac{x^2-2ax}{(x-a)^2}.$$

$$m=f'(1)=-3 \Rightarrow \frac{1^2-2a\cdot 1}{(1-a)^2}=\frac{1-2a}{(1-a)^2}=-3;\;\; 1-2a=-3(1-2a+a^2);$$

$$1-2a=-3+6a-3a^2;\;\; 3a^2-8a+4=0;\;\; a=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2\cdot 3}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{6}=\frac{8\pm 4}{6}=$$

$$=\frac{4\pm 2}{3} \Rightarrow \underline{a_1=\frac{2}{3}}\; y\; \underline{a_2=2}.$$

$b$)

Para $a=1$ la función resulta: $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Como quiera que el denominador de la primera derivada es siempre positivo en el dominio de la función, que $D(f) \Rightarrow R-\{1\}$, la derivada será positiva o negativa cuando lo sea el numerador $x(x-2)$.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0;\;\; x(x-2)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=2.$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ $y$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (0,1) \cup (1, 2)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2 - x(x-2)\cdot[2(x-1)\cdot 1]}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2)\cdot(x-1) - 2x(x-2)}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{2}{(0-1)^3} = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \underline{Máximo: O(0, 0)}.$$

$$f''(2) = \frac{2}{(2-1)^3} = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4 \Rightarrow \underline{Mínimo: A(2, 4)}.$$

**********

3º) Pol quedó ayer con unos amigos en un bar y tomaron 4 refrescos, 3 bocadillos y 5 bolas de helado. Todo ello les costó 19,50 euros. Días atrás, había ido al mismo bar con su primo Martín, y por 2 refrescos, 1 bocadillo y 2 bolas de helado habían pagado 8,10 euros. En este bar todos los refrescos valen lo mismo, todos los bocadillos tienen el mismo precio y las bolas de helados se venden también a precio único.

$a$) Hoy Pol ha vuelto con otros amigos y han tomado 6 refrescos, 5 bocadillos y 8 bolas de helado. Explique razonadamente cuánto han pagado en total.

$b$) Si 1 refresco, 1 bocadillo y 1 bola de helado cuestan 5,10 euros, ¿cuánto vale el refresco, el bocadillo y la bola de helado separadamente?

----------

$a$)

Sean $x, y, z$ lo que cuesta un refresco, un bocadillo y una bola de helado, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y+5z=19{,}50 \\ 2x+y+2z=8{,}10 \\ 6x+5y+8z=N \end{array}\right\}.$$

El rango de la matriz $A$ de coeficientes es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 8 \end{vmatrix}=32+50+36-30-40-48=0 \Rightarrow Rang\ A=3.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, para que el sistema sea compatible es necesario que las matrices de coeficientes y ampliada tienen que ser iguales, por lo cual, $Rang\ A'=2$.

Procediendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 19{,}5 \\ 2 & 1 & 2 & 8{,}1 \\ 6 & 5 & 8 & N \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 8{,}1 \\ 4 & 3 & 5 & 19{,}5 \\ 6 & 5 & 8 & N \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2-2F_1 \\ F_3 \to F_3-3F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 8{,}1 \\ 0 & 1 & 1 & 3{,}3 \\ 0 & 2 & 2 & N-24{,}3 \end{pmatrix} \Rightarrow N-24{,}3=2\cdot 3{,}3=6{,}6;\ \ N=30{,}9.$$

$$\underline{Han\ pagado\ en\ total\ 30{,}9\ euros.}$$

$b)$

El nuevo sistema de ecuaciones que resulta es: $\left.\begin{array}{r} 4x+3y+5z=19{,}50 \\ 2x+y+2z=8{,}10 \\ x+y+z=5{,}10 \end{array}\right\}$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 19{,}5 & 3 & 5 \\ 8{,}1 & 1 & 2 \\ 5{,}1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{\frac{1}{10}\cdot\begin{vmatrix} 195 & 3 & 5 \\ 81 & 1 & 2 \\ 51 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4+10+6-5-8-6}=\frac{\frac{1}{10}\cdot(195+306+405-255-390-243)}{1}=$$

$$=\frac{906-888}{10}=\frac{18}{10}=1{,}8.$$

$$y=\begin{vmatrix} 4 & 19{,}5 & 5 \\ 2 & 8{,}1 & 2 \\ 1 & 5{,}1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 195 & 5 \\ 2 & 81 & 2 \\ 1 & 51 & 1 \end{vmatrix}=\frac{324+510+390-405-408-390}{10}=$$

$$=\frac{834-813}{10}=\frac{21}{10}=2{,}1.$$

$$z=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 19{,}5 \\ 2 & 1 & 8{,}1 \\ 1 & 1 & 5{,}1 \end{vmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 & 195 \\ 2 & 1 & 81 \\ 1 & 1 & 51 \end{vmatrix}=\frac{204+390+243-195-324-306}{10}=$$

$$=\frac{837-825}{10}=\frac{12}{10}=1{,}2.$$

$\underline{Un\ refresco\ vale\ 1{,}8\ euros,un\ bocadillo\ 2{,}1\ euros\ y\ una\ bola\ 1{,}2\ euros.}$

**********

4º) Una empresa de materiales para coches fabrica dos modelos de una pieza determinada, que llamaremos A y B. Cada modelo se fabrica en una hora, mediante un proceso que consta de dos fases. En la primera fase del proceso se destinan 5 trabajadores, y en la segunda, 12. Para fabricar cada modelo, en la primera fase se necesita 1 trabajador para cada pieza, en cambio, en la segunda fase se necesitan 2 trabajadores para el modelo A y 3 trabajadores para el modelo B. El beneficio que se obtiene es de 40 euros por el modelo A y 50 euros para el modelo B.

$a$) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región factible.

$b$) ¿Cuántas piezas de cada modelo por hora se deberán fabricar para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es este beneficio máximo?

----------

$a$)

Sean $x$ $e$ $y$ el número de piezas de los modelos A y B que se fabrican, respectivamente.

$$\underline{La\ función\ de\ objetivos\ es\ f(x,y)=40x+50y.}$$

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x+y\le 5 \\ 2x+3y\le 12 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}.$

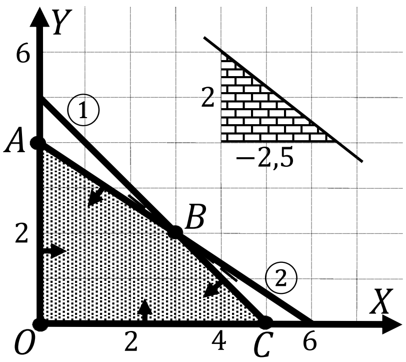
(1) $\Rightarrow x+y\le 5 \Rightarrow y\le 5-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

| x | 0 | 5 |
|---|---|---|
| y | 5 | 0 |

(2) $\Rightarrow 2x+3y\le 12 \Rightarrow y\ge \frac{12-2x}{3} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

| x | 0 | 6 |
|---|---|---|
| y | 4 | 0 |

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.




Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 2x+3y=12 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,4).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ 2x+3y=12 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x-2y=-10 \\ 2x+3y=12 \end{array}\right\} \Rightarrow y=2;\ \ x=3 \Rightarrow B(3,2).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x+y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow C(5,0).$

$b$)

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,4) = 40 \cdot 0 + 50 \cdot 4 = 0 + 200 = 200.$

$B \Rightarrow f(3,2) = 40 \cdot 3 + 50 \cdot 2 = 120 + 100 = 220.$

$C \Rightarrow f(5,0) = 40 \cdot 5 + 50 \cdot 0 = 200 + 0 = 200.$

El mínimo se produce en el punto $B(3,2)$.

También se hubiera obtenido el punto $B$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 40x + 50y = 0 \Rightarrow y = -\frac{40}{50}x = -\frac{4}{5}x = -\frac{2}{2,5}x \Rightarrow m = -\frac{2}{2,5}.$

$\underline{Beneficio\ máximo: fabricando\ por\ hora\ 3\ piezas\ tipo\ A\ y\ 2\ tip0\ B.}$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ por\ hora\ es\ de\ 220\ euros.}$

**********

5º) Una compañía de móviles presentó hace un año un teléfono inteligente al precio de 750 euros. Recientemente, un estudio de mercado ha llegado a la conclusión de que, con este precio, compran el teléfono 2.000 clientes al mes, y que la relación entre estas dos variables es lineal, de manera que por cada 10 euros que se incrementa el precio del móvil, lo compran 100 clientes menos, y al revés: por cada 10 euros de descuento sobre el precio inicial de 750 euros la compran 100 clientes más.

$a$) Deducir que la función que determina los ingresos mensuales de la compañía según el precio es $I(p) = -10p^2 + 9.500p$.

$b$) Hallar cuál debe ser el precio del móvil para obtener ingresos, el precio del móvil que produce los ingresos máximos y el valor de estos ingresos máximos.

----------

$a$)

Sean $10x$ los euros que sube o baja el precio de los teléfonos

El precio por unidad es $p = 750 + 10x \Rightarrow x = \frac{p-750}{10}$.

El número de compradores es de $N = 2.000 - 100x$.

$Ingresos = Número\ unidades \times precio\ unitario \Rightarrow$

$\Rightarrow I(p) = \left(2.000 - 100 \cdot \frac{p-750}{10}\right) \cdot p = [2.000 - 10 \cdot (p - 750)] \cdot p =$

$= (2.000 - 10p + 7.500) \cdot p = (-10p + 9.500) \cdot p.$

$\underline{En\ efecto: la\ función\ ingresos\ es\ I(p) = -10p^2 + 9.500p.}$

$b$)

Los ingresos serán máximos cuando se anule su primera derivada:

$I'(p) = -20p + 9.500 = 0;\ 2p = 950 \Rightarrow p = 475.$

$\underline{Para\ obtener\ el\ máximo\ beneficio\ hay\ que\ vender\ los\ móviles\ a\ 475\ euros.}$

$I(475) = -10 \cdot 475^2 + 9.500 \cdot 475 = 4.750 \cdot (-475 + 950) =$

$= 4.750 \cdot 475 = 2.256.250.$

$\underline{El\ benefico\ máximo\ es\ de\ 2.256.250\ euros.}$

**********

6º) El número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función $P(t) = \frac{5+t^2}{(t+1)^2}$, donde $t$ mide el número de años transcurridos.

$a$) ¿Cuál es la población inicial y la población después de 9 años? ¿A partir de qué número la población será inferior a un millón de individuos?

$b$) Con el paso de los años, ¿hacia qué valor tenderá el número de individuos de la población?

----------

$a$)

$$P(0) = \frac{5}{(0+1)^2} = 5.$$

$$P(9) = \frac{5+9^2}{(9+1)^2} = \frac{5+81}{10^2} = \frac{86}{100} = 0{,}86.$$

$$\underline{Al\ comienzo\ había\ 5.000.000\ de\ individuos\ y\ a\ los\ 9\ años, 860.000}$$

$b$)

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{5+t^2}{(t+1)^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2+5}{t^2+2t+1} = 1.$$

$$\underline{Con\ el\ paso\ de\ los\ años\ se\ estabiliza\ la\ población\ en\ 1.000.000\ individuos.}$$

**********