PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS | Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) De una función $y = f(x)$ se sabe que su derivada es $f'(x) = x^3 - 4x$.

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) Determine las abscisas de sus extremos relativos y clasifíquelos.

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = x^3 - 4x = 0;\ \ x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2.$$

Teniendo en cuenta la expresión polinómica de $f'(x)$, sus raíces dividen el dominio de la función, que es R, en los periodos $(-\infty, -2), (-2, 0), (0, 2)\ y\ (2, +\infty)$, en los cuales el valor de la derivada es, alternativamente, positiva y negativa. Para determinar el signo de los intervalos consideramos el valor $x = 1 \in (0, 2)$ es $f'(1) = -3 < 0 \Rightarrow decreciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2).}$$

b)

De la continuidad de la función y de los periodos de crecimiento se deducen los extremos relativos así como si son máximo o mínimos; no obstante se determinan a través de la segunda derivada.

La condición necesaria para que una función polinómica tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: según que sea negativa o positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo o de un mínimo, respectivamente.

$f''(x) = 3x^2 - 4.$

$f''(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 12 - 4 = 8 > 0 \;\Rightarrow\; \underline{Mínimo\ para\ x = -2}.$

$f''(0) = -4 < 0 \;\Rightarrow\; \underline{Máximo\ relativo\ para\ x = 0}.$

$f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 = 12 - 4 = 8 > 0 \;\Rightarrow\; \underline{Mínimo\ para\ x = 2}.$

****

2º) Desde una barca se dispara una bengala de salvamento marítimo que se apaga al caer al cabo de 4 minutos. En este intervalo de tiempo, se comprueba que la intensidad lumínica de la bengala en función del tiempo, medida en porcentaje del 0 % al 100 %, queda perfectamente descrita por la expresión $L(t) = 25 \cdot t \cdot (4 - t)$, en donde el tiempo varía entra 0 y 4 minutos.

a) Calcule para qué valor de t el porcentaje de intensidad lumínica será máximo.

b) Si desde la costa la bengala solo es visible cuando su intensidad lumínica es superior al 75 %, ¿cuál es el intervalo de tiempo en que será visible desde la costa y, por tanto, será más factible el salvamento?

----

a)

La condición necesaria para que una función tenga un máximo relativo es que se anule su primera derivada.

$$L'(t) = 25 \cdot [1 \cdot (4 - t) + t \cdot (-1)] = 25 \cdot (4 - t - t) = 25 \cdot (4 - 2t) =$$

$$= 50 \cdot (2 - t) = 0 \Rightarrow t = 2.$$

Teniendo en cuenta que $L(t) = 25 \cdot t \cdot (4 - t) = 100t - 25t^2$ es una parábola cóncava ($\cap$), para $t = 2$ tiene su vértice, que es su máximo absoluto.

$$\underline{El\ valor\ de\ la\ intensidad\ lumínica\ de\ la\ bengala\ es\ máximo\ para\ t = 2.}$$

b)

$$L(t) = 25t(4 - t) = 75;\ \ 4t - t^2 = 3;\ \ t^2 - 4t + 3 = 0;\ \ t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 3.$$

$$\underline{Será\ visible\ desde\ la\ costa\ entre\ el\ minuto\ y\ los\ tres\ minutos.}$$

****

3º) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix}$, donde m y n son dos números reales.

a) Compruebe que se cumple la igualdad $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$.

b) Determine m y n de manera que las matrices B y C conmuten, es decir, que se cumple que $B \cdot C = C \cdot B$.

----

a)

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2.$$

$$(A - B)(A + B) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 25 & 10 \\ 10 & 25 \end{pmatrix}}.$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 25 & 10 \\ 10 & 25 \end{pmatrix}}.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ (A - B)(A + B) = A^2 - B^2}.$$

b)

$$B \cdot C = C \cdot B \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} m & n \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ n & m \end{pmatrix} \Rightarrow m = -1, n = 1.$$

$$\underline{B \cdot C = C \cdot B \Rightarrow m = -1, n = 1}.$$

****

4º) Se tienen unas cuantas monedas de un euro distribuidas en tres pilas. Se pasan 12 monedas de la tercera pila a la segunda y, a continuación, se pasan 10 de la segunda pila a la primera. Una vez hecho esto, las tres pilas tienen las mismas monedas.

a) Con estos datos, ¿podemos determinar la cantidad de monedas que había inicialmente en cada pila? Razona la respuesta.

b) Averigüe la cantidad de monedas que había inicialmente en cada pila si sabemos que en total hay 51 monedas.

----

a)

Sean x, y, z los números de monedas de las pilas primera, segunda y tercera, respectivamente.

Del movimiento de monedas indicado resulta: $x + 10 = y + 2 = z - 12$, que expresado en forma de sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} x + 10 = y + 2 \\ x + 10 = z - 12 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x - y = -8 \\ x - z = -22 \end{array}\right\}.$$

El sistema de ecuaciones lineales que resulta tiene dos ecuaciones con tres incógnitas, por lo cual:

$$\underline{No\ se\ puede\ determinar\ el\ número\ de\ monedas\ de\ cada\ pila.}$$

b)

La condición de que la suma de las monedas es 51 es una ecuación que, añadida al sistema resultante del apartado anterior, resulta: $\left.\begin{array}{r} x - y = -8 \\ x - z = -22 \\ x + y + z = 51 \end{array}\right\}.$

De las dos primeras ecuaciones se tiene que: $y = x + 8;\ \ z = x + 22.$

Sustituyendo los valores obtenidos en la tercera ecuación:

$x + (x + 8) + (x + 22) = 51;\ \ 3x + 30 = 51;\ \ 3x = 21;\ \ x = 7.$

$y = 7 + 8 = 15;\ \ z = 7 + 22 = 29.$

$$\underline{En\ la\ primera\ pila\ había\ 7\ euros,\ en\ la\ segunda,\ 15\ y\ en\ la\ tercera,\ 29.}$$

****

5º) Una compañía aérea va a organizar para estos días un puente aéreo entre el aeropuerto de Barcelona – El Prat y el de Palma de Mallorca, con plazas suficientes de pasaje y carga, para transportar al menos a 1.600 personas y 96 toneladas de equipaje y mercaderías. Para hacerlo, tiene a su disposición 11 aviones de tipo A, que pueden transportar 200 personas y 6 toneladas de equipaje y mercaderías cada uno, y 18 aviones de tipo B que pueden transportar 100 personas y 15 toneladas cada uno. Si la contratación de un avión de tipo A le cuesta 4.000 euros y la de un avión de tipo B le cuesta 1.000 euros:

a) Determine la función de objetivos, las restricciones y dibuje la región de las posibles opciones que tiene la compañía.

b) Calcule el número de aviones de cada tipo que debe contratar para que el coste sea el mínimo y determine cuál es este coste mínimo.

----

a)

Sean x e y el número de aviones de los tipos A y B que se contratan, respectivamente.

Las condiciones del problema se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 200x + 100y \geq 1.600 \\ 6x + 15y \geq 96 \\ 0 \leq x \leq 11 \\ 0 \leq y \leq 8 \end{array}\right\} \text{ o mejor: } \left.\begin{array}{r} 2x + y \geq 16 \\ 2x + 5y \geq 32 \\ 0 \leq x \leq 11 \\ 0 \leq y \leq 8 \end{array}\right\}.$$

La región factible se indica en la figura:

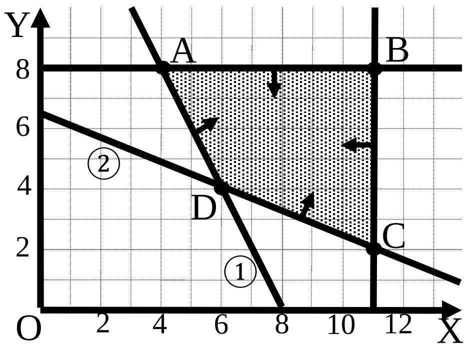
① $\Rightarrow 2x + y \geq 16 \Rightarrow y \geq 16 - 2x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	8	4
y	0	8

② $\Rightarrow 2x + 5y \geq 32 \Rightarrow y \geq \frac{32-2x}{5} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	6	11
y	4	2

Los vértices de la zona factible son los siguientes:



$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 8 \\ 2x + y = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow A(4,8).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 11 \\ y = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow B(11,8).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 11 \\ 2x + 5y = 32 \end{array}\right\} \Rightarrow 22 + 5y = 32;\ \ 5y = 10;\ \ y = 2 \Rightarrow C(11,2).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y = 16 \\ 2x + 5y = 32 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -2x - y = -16 \\ 2x + 5y = 32 \end{array}\right\} \Rightarrow 4y = 16; \;\; y = 4 \Rightarrow D(6, 4).$$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 4.000x + 1.000y$.

$b)$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(4, 8) = 4.000 \cdot 4 + 1.000 \cdot 8 = 16.000 + 8.000 = 24.000.$$

$$B \Rightarrow f(11, 8) = 4.000 \cdot 11 + 1.000 \cdot 8 = 44.000 + 8.000 = 52.000.$$

$$C \Rightarrow f(11, 2) = 4.000 \cdot 11 + 1.000 \cdot 2 = 44.000 + 2.000 = 46.000.$$

$$D \Rightarrow f(6, 4) = 4.000 \cdot 6 + 1.000 \cdot 4 = 24.000 + 4.000 = 28.000.$$

El mínimo se produce en el punto $A(4, 8)$.

$$\underline{El\ coste\ es\ minimo\ utilizando\ 4\ aviones\ tipo\ A\ y\ 8\ del\ tipo\ B}.$$

$$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 24.000\ euros}.$$

****

6º) Considere la función $f(x) = -x^2 + bx + c$, con b y c números reales:

a) Encuentre b y c de manera que la gráfica de la función pase por el punto $P(-1, 0)$ y tenga un extremo local en el punto de abscisa $x = 3$. Razone de que tipo de extremo relativo se trata.

b) Para el caso de $b = 3$ y $c = 2$, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función es paralela a la recta $y = 5x - 2$.

----

a)

Por contener al punto $P(-1, 0)$:

$f(-1) = 0 \Rightarrow -(-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0;\ -1 - b + c = 0;\ b - c = -1.$ (1)

$f'(x) = -2x + b.$

Por tener un extremo local para $x = 3$:

$f'(3) = 0 \ \Rightarrow -2 \cdot 3 + b = 0;\ -6 + b = 0 \Rightarrow \underline{b = 6}.$

Sustituyendo el valor de b obtenido en la expresión (1):

$6 - c = -1 \Rightarrow \ \underline{c = 7}.$

b)

Para el caso de $b = 3$ y $c = 2$ la función es $f(x) = -x^2 + 3x + 2.$

La pendiente de la recta $y = 5x - 2$ es $m = 5.$

El valor de la pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$f'(x) = -2x + 3. \qquad m = f'(x) = 5 \Rightarrow -2x + 3 = 5;\ \ 2x = -2 \Rightarrow x = -1.$

El punto de tangencia es el siguiente:

$f(-1) = -(-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 2 = -1 - 3 + 2 = -2 \Rightarrow Q(-1, -2).$

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - (-2) = 5 \cdot [x - (-1)];\ \ y + 2 = 5(x + 1);$

$y + 2 = 5x + 5.$

$\underline{Recta\ tangente: t \equiv 5x - y + 3 = 0.}$

****