PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

EXTRAORDINARIA – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará solo tres problemas entre los seis propuestos. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

1º) Se da el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x - y + z = m \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + mz = m \end{cases}$, donde m es un parámetro real. Se pide:

a) La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m.

b) La solución del sistema cuando $m = 1$.

c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & m & m \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{vmatrix} = 2m - 4 - 15 - 5 + 24 + m = 0;\ \ 3m = 0 \Rightarrow m = 0.$$

$$\underline{Para\ m \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ m = 0 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Rang\ A' = 2.$$

$$\underline{Para\ m = 0 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $m = 1$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 1 \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + z = 1 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1-3-1+12}{3} = \frac{13-4}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1+15-6-1}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2-4-5+1}{3} = \frac{3-9}{3} = \frac{-6}{3} = -2.$$

$$\underline{Solución: x = 3,\ y = 3,\ z = -2.}$$

$c)$

El sistema es compatible indeterminado para $m = 0$, en cuyo caso el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y = 0 \end{array}\right\}$, que es, además, homogéneo.

Haciendo $z = \lambda$ y despreciando la tercera ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y = -\lambda \\ x + y = -3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = -4\lambda;\ \ x = -\frac{4}{3}\lambda;\ \ y = 2x + \lambda = -\frac{8}{3}\lambda + \lambda = -\frac{5}{3}\lambda.$$

$$\underline{Solución: x = -\frac{4}{3}\lambda, y = -\frac{5}{3}\lambda, z = \lambda, \forall\lambda \in R.}$$

****

2º) Se dan las rectas $r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$, $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi: x+my+z=2$, que depende del parámetro real m. Obtened:

a) La posición relativa de las rectas r y s.

b) El valor del parámetro m para que las recta r esté contenida en el plano π.

c) Los puntos A, B y C, intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m=2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2,2,2)$.

----

a)

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases} \Rightarrow x=\lambda;\ \ y=1-\lambda;\ \ z=-1+2\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0,1,-1)$ y $\overrightarrow{v_r}=(1,-1,2)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(1,0,0)$ y $\overrightarrow{v_s}=(1,-1,2)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente dependientes por ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s son paralelas o coincidentes. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Según que el punto $B \in s$ pertenezca o no a la recta r, las rectas serán coincidentes o paralelas, respectivamente.

Un punto pertenece a una recta cuando satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{r} r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \\ B(1,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x=1 \rightarrow \lambda=1 \\ y=0 \rightarrow \lambda=1 \\ z=0 \rightarrow \lambda=1/2 \end{array} \right\} \Rightarrow B \notin r.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ son\ paralelas.}$$

b)

Para que las recta r esté contenida en el plano π tienen que cumplirse las dos siguientes condiciones: el punto $A(0,1,-1) \in s$ tiene que pertenecer también al plano π y, el vector director de la recta y el vector normal del plano tienen que ser perpendiculares.

$$\left. \begin{array}{r} x+my+z=2 \\ A(0,1,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow 0+m-1=2 \Rightarrow m=3.$$

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, m, 1)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (1, -1, 2) \cdot (1, m, 1) = 1 - m + 2 = 0 \Rightarrow m = 3.$

$$\underline{La\ recta\ r\ est\acute{a}\ contenida\ en\ el\ plano\ \pi\ para\ m = 3}.$$

$c)$ Los puntos A, B y C, intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m = 2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2, 2, 2)$.

Para $m = 2$ el plano π resulta ser $\pi: x + 2y + z = 2$.

Los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} Eje\ X \Rightarrow \left.\begin{array}{r} z = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \\ \pi: x + 2y + z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \underline{A(2, 0, 0)}.$$

$$\left.\begin{array}{r} Eje\ Y \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \\ \pi: x + 2y + z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = 2;\ \ y = 1 \Rightarrow \underline{B(0, 1, 0)}.$$

$$\left.\begin{array}{r} Eje\ Z \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \\ \pi: x + 2y + z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 2 \Rightarrow \underline{C(0, 0, 2)}.$$

El volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan, en valor absoluto.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0, 1, 0) - (2, 0, 0)] = (-2, 1, 0).$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(0, 0, 2) - (2, 0, 0)] = (-2, 0, 2).$

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = [(2, 2, 2) - (2, 0, 0)] = (0, 2, 2).$

$$V_{ABCP} = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot |8 + 4| = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2 \Rightarrow \underline{V_{ABCP} = 2\ u^3}.$$

****

3º) Dada la función $f(x) = x \cdot e^{1-x^2}$, calculad:

$a)$ El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.

$b)$ Las asíntotas y la gráfica de f.

$c)$ La integral $I = \int f(x) \cdot dx$.

$a)$

La función está definida para cualquier valor real de x, por ser producto de dos función continuas en R: $D(f) \Rightarrow R$.

$f(-x) = -x \cdot e^{1-(-x)^2} = -x \cdot e^{1-x^2} = -f(x)$. La función es simétrica con respecto al origen.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{1-x^2} - x \cdot 2x \cdot e^{1-x^2} = e^{1-x^2} \cdot (1 - 2x^2).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{1-x^2} \cdot (1 - 2x^2) = 0;\ \ e^{1-x^2} \neq 0, \forall x \in R;\ \ 1 - 2x^2 = 0;.$$

$$2x^2 = 1;\ \ x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Por ser $f(x)$ continua en R, las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0 \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es:

$$f'(0) = e^{1-0} \cdot (1 - 0) = e > 0 \Rightarrow Crecreciente.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = -2x \cdot e^{1-x^2} \cdot (1-2x^2) + e^{1-x^2} \cdot (-4x) =$$

$$= e^{1-x^2} \cdot (-2x + 4x^3 - 4x) = 2x \cdot e^{1-x^2} \cdot (2x^2 - 3).$$

$$f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdot (-2) < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2e}}{2} \Rightarrow \underline{Máx.relativo\ A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2e}}{2}\right)}.$$

Por simetría con respecto al origen: $\underline{Mín.relativo\ B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2e}}{2}\right)}$

$b)$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x \cdot e^{1-x^2}\right) = \pm(\infty \cdot e^{1-\infty}) = \pm\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2-1}} = \pm\frac{\infty}{e^{\infty}} = \pm\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2x \cdot e^{x^2-1}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función.}$$

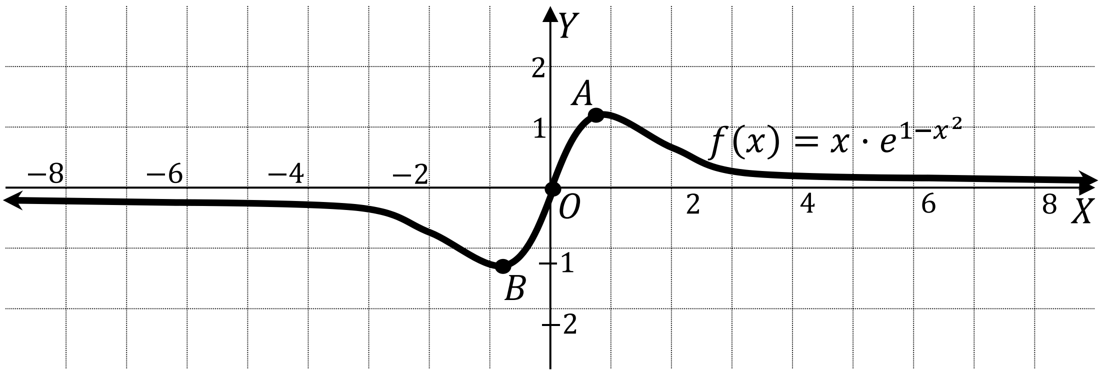
Asíntotas verticales:

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ verticales\ por\ ser\ una\ función\ continua\ en\ R.}$$

Las asíntotas oblicuas:

$$\underline{f(x)\ no\ tiene\ asíntotas\ oblicuas\ por\ ser\ incompatibles\ con\ las\ horizontales.}$$

Teniendo en cuanta lo anterior y que la función pasa por el origen, la representación gráfica de la función, aproximada, es la siguiente.



$c)$

$$I = \int f(x) \cdot dx = \int \left(x \cdot e^{1-x^2}\right) \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 1 - x^2 = t \\ x \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \int e^t \cdot dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot e^t + C \Rightarrow \underline{I = \int \left(x \cdot e^{1-x^2}\right) \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{1-x^2} + C}.$$

****

4º) Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & a & 1\\ 1 & a^2-2 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$. Obtened:

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro a.

b) Una matriz C tal que $AC=16I$, siendo I la matriz identidad, cuando $a=0$.

c) El rango de la matriz B y la discusión si el sistema $B\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$ tiene solución.

----

a)

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & a & 1\\ 1 & a^2-2 & 3\end{vmatrix}=3a-3(a^2-2)+2-3a-(a^2-2)+6=$$

$$=8-4(a^2-2)=0;\ \ 2-(a^2-2)=0;\ \ a^2=4\Rightarrow a_1=-2, a_2=2.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix}a\neq -2\\ a\neq 2\end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ A=3.}$$

Por contener A el menor $\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}\neq 0$:

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix}a=-2\\ a=2\end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ A=2.}$$

b)

$$A\cdot C=16I;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot C=16\cdot A^{-1}\cdot I;\ \ I\cdot C=16\cdot A^{-1}\Rightarrow \underline{C=16\cdot A^{-1}}.$$

Para $a=0$ es $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$. Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_2\to F_2+F_1\\ F_3\to F_3-F_1\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{F_2\to\tfrac{1}{2}F_2\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_1\to F_1-2F_2\\ F_3\to F_3+4F_2\end{Bmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{F_3\to\tfrac{1}{8}F_3\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 \to F_1 + F_3 \\ F_2 \to F_2 - 2F_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C = 16 \cdot A^{-1} = 16 \cdot \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{C = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$c)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_2 = -F_1 \\ F_3 = 2F_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{Rang\ B = 1}.$$

La matriz ampliada del sistema $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es la siguiente:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_2 = -F_1 \\ F_3 = 2F_1 \end{array} \right\} \Rightarrow Rang\ B' = 1.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Rang\ B = Rang\ B' = 1 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I, con\ dos\ grados\ de\ libertad.}$$

****

5º) Dados los puntos $P(1,1,0), Q(2,-1,1)\ y\ R(a,3,-1)$, se pide:

a) La ecuación del plano π que contiene a P, Q y R cuando $a = 1$ y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas.

b) La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $a = 1$ y es paralela a la recta s que pasa por P y Q. Calculad la distancia entre las rectas $r\ y\ s$.

c) Los valores de a para los cuales P, Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene.

----

a)

Cuando $a = 1 \Rightarrow R(1,3,-1)$.

Los puntos $P(1,1,0), Q(2,-1,1)\ y\ R(1,3,-1)$determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(2,-1,1) - (1,1,0)] = (1,-2,1).$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = [(1,3,-1) - (1,1,0)] = (0,2,-1).$$

$$\pi(\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PR};\ P) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$2(x-1) + 2z - 2(x-1) + (y-1) = 0;\ 2z + (y-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\pi \equiv y + 2z - 1 = 0}.$$

La distancia del origen de coordenadas al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(O,\pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv y + 2z - 1 = 0$:

$$d(O,\pi) = \frac{|-1|}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow \underline{d(O,\pi) = \frac{\sqrt{5}}{5}\ u}.$$

b)

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{PQ} = (1,-2,1).$$

Considerando el punto $P(1,1,0) \Rightarrow s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

Por ser paralelas las rectas $r\ y\ s$ es $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_s} = (1,-2,1)$.

$R(1,3,-1) \Rightarrow \underline{r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{1}}.$

La distancia entre dos rectas paralelas es equivalente a la distancia de un punto de una de las rectas a la otra recta. Por ejemplo, la distancia de s al punto $R \in r$.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.

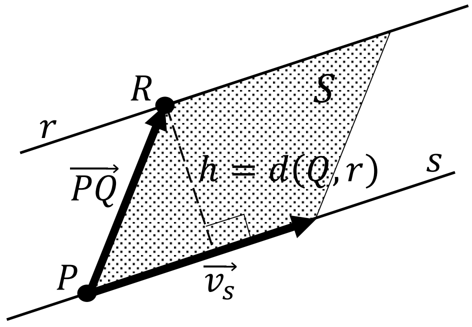
$$\left.\begin{array}{c} S = \left|\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{PR}\right| \\ S = \left|\overrightarrow{v_s}\right| \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{PR}\right| = \left|\overrightarrow{v_s}\right| \cdot h \Rightarrow \underline{h = d(R,s) = \frac{\left|\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{PR}\right|}{\left|\overrightarrow{v_s}\right|}}.$$

Aplicando la fórmula al punto R y a la recta s:

$$h = d(r,s) = d(R,s) = \frac{\left|\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{PR}\right|}{\left|\overrightarrow{v_s}\right|} =$$

$$= \frac{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{|2i+2k-2i+j|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{|j+2k|}{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \Rightarrow \underline{d(r,s) = \frac{\sqrt{30}}{6}\ u}.$$



$c)$

Los puntos $P(1,1,0), Q(2,-1,1)\ y\ R(a,3,-1)$ estarán alineados cuando los vectores $\overrightarrow{PQ}\ y\ \overrightarrow{PR}$ sean linealmente dependientes, es decir: que sus componentes sean proporcionales.

$\overrightarrow{PQ} = (1,-2,1).$

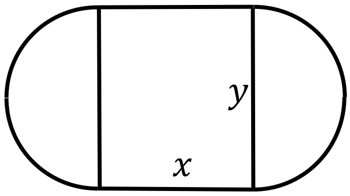
$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = [(a,3,-1) - (1,1,0)] = (a-1,2,-1).$

$\frac{1}{a-1} = \frac{-2}{2} = \frac{1}{-1} \Rightarrow -1 = a - 1 \Rightarrow \underline{a = 0}.$

La recta que los contiene s, calculada en a): $\underline{s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1}}$

****

6º) Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia afuera. La superficie del campo mide $(4+\pi)$ metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal como se observa en la figura. Si pide:



$a)$ Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura "y" den rect

$b)$ Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima.

$a)$

$$S = x \cdot y + \pi \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 4 + \pi; \;\; x \cdot y + \pi \cdot \frac{y^2}{4} = 4 + \pi;$$

$$4xy + \pi y^2 = 16 + 4\pi \Rightarrow x = \frac{16+4\pi-\pi y^2}{4y} = \frac{4+\pi}{y} - \frac{\pi y}{4}.$$

$$Perímetro = P(y) = 2y + 2x + 2\pi \cdot \frac{y}{2} = 2y + \frac{8+2\pi}{y} - \frac{\pi y}{2} + \pi y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P(y) = 2y + \frac{8+2\pi}{y} + \frac{\pi y}{2}}.$$

$b)$

La cantidad de pintura gastada será mínima cuando lo sea el perímetro.

Una función tiene un mínimo relativo cuando su se anula su primera derivada y es positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$P'(y) = 2 - \frac{8+2\pi}{y^2} + \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow 2 + \frac{\pi}{2} = \frac{8+2\pi}{y^2}; \;\; 4y^2 + \pi y^2 = 16 + 4\pi;$$

$$(4+\pi)y^2 = 16 + 4\pi; \;\; y^2 = \frac{16+4\pi}{4+\pi} = 4 \Rightarrow y = \pm 2.$$

La solución negativa carece de sentido lógico, por lo cual, la solución es $y = 2$.

Justificación de mínimo: $P''(y) = -(8+2\pi) \cdot \frac{-2y}{y^4} = \frac{16+4\pi}{y^3}$.

$$P''(2) = \frac{16+4\pi}{2^3} > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ y = 2,\ como\ queríamos\ justificar.$$

Para $y = 2 \Rightarrow x = \frac{4+\pi}{2} - \frac{2\pi}{4} = \frac{4+\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2$.

$$\underline{El\ gasto\ de\ pintura\ es\ mínimo\ para\ x = y = 2\ metros.}$$

****