

**PRUEBA DE ACCESO (EBAU)****UNIVERSIDADES DE VALENCIA****JUNIO – 2019**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

**MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

**OPCIÓN A**

1º) Se dan la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$ , que depende del parámetro real  $a$ , y una matriz B de orden 3 tal que  $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$ , siendo  $I$  la matriz identidad de orden 3. *Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:*

a) El rango de la matriz A en función del parámetro  $a$  y el determinante de la matriz  $2A^{-1}$  cuando  $a = 1$ .

b) Todas las soluciones del sistema  $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  cuando  $a = -1$ .

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando  $m$  y  $n$  tales que  $B^{-1} = mB + nI$ .

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix} = a(a+1) - 2a(a-1) + 3a(a+1) - 2(a-1) =$$

$$= 4a(a+1) - 2a^2 + 2a - 2a + 2 = 4a^2 + 4a - 2a^2 + 2 = 2a^2 + 4a + 2 = 0;$$

$$a^2 + 2a + 1 = 0; (a+1)^2 = 0 \Rightarrow a = -1.$$

$$\text{Para } a = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } A = 2.$$

Para  $a \neq -1 \Rightarrow \text{Rang } A = 3$ ; Para  $a = -1 \Rightarrow \text{Rang } A = 2$ .

$$|2 \cdot A^{-1}| = 8 \cdot \frac{1}{|A|} = 8 \cdot \frac{1}{2a^2+4a+2} = \frac{4}{(a+1)^2}. \text{ Para } a = 1 \text{ es: } \frac{4}{(1+1)^2} = 1.$$

$$\underline{\text{Para } a = 1 \Rightarrow |2 \cdot A^{-1}| = 1.}$$

Nota: El factor 8 es debido a que cuando se multiplica una matriz por un número la matriz resultante es la que resulta de multiplicar por el número todos y cada uno de los elementos de la matriz; se tiene en cuenta que la matriz es de orden 3 y que el determinante de una matriz queda multiplicado por un número cuando se multiplican por ese número todos los elementos de una de sus líneas.

b)

$$\text{Para } a = -1 \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz ampliada es  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  cuyo rango es 2 por tener las dos primeras filas proporcionales.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius es sistema es compatible indeterminado con un parámetro por ser la diferencia entre el número de incógnitas y el rango de la matriz ampliada de uno.

El sistema resulta  $\left. \begin{array}{l} x - z = -1 \\ -2x + 2z = 2 \\ -3x - 2y - z = 0 \end{array} \right\}$ , que a efectos de resolución es equivalente al sistema  $\left. \begin{array}{l} x - z = -1 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{array} \right\}$ , compatible indeterminado. Haciendo  $z = \lambda$ :

$$x = -1 + \lambda; \quad 2y = -3x - z = 3 - 3\lambda - \lambda = 3 - 4\lambda; \quad y = \frac{3}{2} - 2\lambda.$$

$$\underline{\text{Solución: } x = -1 + \lambda, \quad y = \frac{3}{2} - 2\lambda, \quad z = \lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.}$$

c)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

Se sabe que  $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$ . Operando adecuadamente, por ejemplo de la forma siguiente:

$$B^2 + 2B + I = \frac{1}{3}I + I = \frac{4}{3}I; \quad (B + I)^2 = \frac{4}{3}I; \quad B + I = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{I} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot I;$$

$$B = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot I - I = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \cdot I = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right) \cdot I = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \cdot I.$$

$$|B| = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \cdot |I| = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \cdot 1 = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \neq 0.$$

Queda comprobado que la matriz  $B$  es invertible.

$$\text{Por otra parte: } B^2 + 2B = \frac{1}{3}I; \quad B \cdot (B + 2I) = \frac{1}{3}I; \quad B \cdot (3B + 6I) = I.$$

$$\text{Sabiendo que } B \cdot B^{-1} = I \Rightarrow 3B + 6I = B^{-1}.$$

Como se pide determinar  $m$  y  $n$  tales que  $B^{-1} = mB + nI$ , es evidente que:

$$\underline{m = 3 \text{ y } n = 6.}$$

\*\*\*\*\*

2º) Consideramos en el espacio las rectas  $r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$  y  $s \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$ . *Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:*

a) La ecuación del plano que contiene a las rectas  $r$  y  $s$ .

b) La recta que pasa por el punto  $P(0, -1, 2)$  y corta perpendicularmente a la recta  $r$ .

c) El valor que deben tener los parámetros reales  $a$  y  $b$  para que la recta  $s$  esté contenida en el plano  $\pi \equiv x - 2y + az = b$ .

-----

a)

La expresión de  $r$  por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de  $r$  son  $A(0, 3, 3)$  y  $\vec{v}_r = (1, 1, 2)$ .

Un punto y un vector director de  $s$  son  $B(0, -1, 2)$  y  $\vec{v}_s = (1, 1, 2)$ . (Nótese que las rectas  $r$  y  $s$  son paralelas o coincidentes).

Para diferenciar el caso se comprueba si el punto  $A(0, 3, 3) \in r$  satisface la ecuación de la recta  $s \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$ :  $0 \neq 3 + 1 \Rightarrow A \notin s \Rightarrow$   $r$  y  $s$  son paralelas.

Los puntos A y B determinan el vector  $\vec{AB} = [B - A] = (0, -4, -1)$ .

$$\text{La expresión general del plano es: } \pi(A; \vec{v}_r, \vec{AB}) \equiv \begin{vmatrix} x & y - 3 & z - 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-x - 4(z - 3) + 8x + (y - 3) = 0; \quad 7x - 4z + 12 + y - 3 = 0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 7x + y - 4z + 9 = 0.}}$$

b)

El haz de planos perpendiculares a  $r$  es  $\beta \equiv x + y + 2z + D = 0$ .

De todos los infinitos plano del haz  $\beta$ , el plano  $\alpha$  que contiene al punto  $P(0, -1, 2)$  es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \beta \equiv x + y + 2z + D = 0 \\ P(0, -1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow 0 - 1 + 2 \cdot 2 + D = 0; \quad 3 + D = 0 \Rightarrow D = -3.$$

$$\alpha \equiv x + y + 2z - 3 = 0.$$

El punto  $Q$  de intersección de la recta  $r$  y el plano  $\alpha$  es el siguiente:

$$\alpha \equiv x + y + 2z - 3 = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda + (3 + \lambda) + 2(3 + 2\lambda) - 3 = 0;$$

$$\lambda + 3 + \lambda + 6 + 4\lambda - 3 = 0; \quad 6\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow Q(-1, 2, 1).$$

Los puntos  $P$  y  $Q$  determinan el vector  $\overrightarrow{QP} = [P - Q] = (1, -3, 1)$ .

$$\text{La recta pedida es: } t \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 - 3\mu. \\ z = 2 + \mu \end{cases}$$

c)

Una recta está contenida en un plano cuando dos puntos de la recta están contenidos en el plano.

La expresión de la recta  $s \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$  dada por unas ecuaciones paramétricas es  $s \equiv \begin{cases} x = \delta \\ y = -1 + \delta. \\ z = 2 + 2\delta \end{cases}$

Dos puntos de la recta  $s$  son  $B(0, -1, 2)$  y  $C(1, 0, 4)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - 2y + az = b \\ B(0, -1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow 0 - 2 \cdot (-1) + 2 \cdot a = b; \quad 2a - b = -2. \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - 2y + az = b \\ C(1, 0, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot a = b; \quad 4a - b = -1. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left. \begin{array}{l} 2a - b = -2 \\ 4a - b = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2a + b = 2 \\ 4a - b = -1 \end{array} \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow \underline{a = \frac{1}{2}}.$$

$$2a - b = -2; \quad 2 \cdot \frac{1}{2} - b = -2; \quad 1 - b = -2 \Rightarrow \underline{b = 3}.$$

\*\*\*\*\*

3º) Se considera la función  $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ . Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función  $f(x)$ .

b) La representación gráfica de la curva  $f(x)$ .

c) El valor del parámetro  $a$  para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo  $[0, 1]$  a la función  $g(x) = f(x) + ax$ .

d) El valor de las integrales indefinidas  $I_1 = \int f(x) \cdot dx$  e  $I_2 = \int x \cdot e^{-x} \cdot dx$ .

-----

a)

Las asíntotas horizontales de una función son los valores finitos que toma la función cuando  $x$  tiende a más infinito o menos infinito.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^{-x^2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x \cdot e^{x^2}} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot e^{-x^2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x \cdot e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

La recta  $x = 0$  es asíntota horizontal.

Asíntotas verticales no tiene por ser  $e^{x^2} \neq 0, \forall x \in R$ .

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}. \quad f'(x) = \frac{1 \cdot e^{x^2} - x \cdot 2x \cdot e^{x^2}}{(e^{x^2})^2} = \frac{(1-2x^2) \cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \frac{1-2x^2}{e^{x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-2x^2}{e^{x^2}} = 0; \quad 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Teniendo en cuenta que  $D(f) \Rightarrow R$  y que  $e^{x^2} > 0, \forall x \in R$ , los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{\text{Decrecimiento: } f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)}.$$

$$\underline{\text{Crecimiento: } f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.$$

$$f''(x) = \frac{-4x \cdot e^{x^2} - (1-2x^2) \cdot 2x \cdot e^{x^2}}{(e^{x^2})^2} = \frac{-4x - 2x \cdot (1-2x^2)}{e^{x^2}} = \frac{-4x - 2x + 4x^3}{e^{x^2}} = \frac{2x \cdot (2x^2 - 3)}{e^{x^2}}.$$

Conviene tener en cuenta que tanto  $f(x)$  como  $f''(x)$  son simétricas con respecto al origen, por ser  $f(x) = -f(x)$  y  $f''(x) = -f''(x)$ .

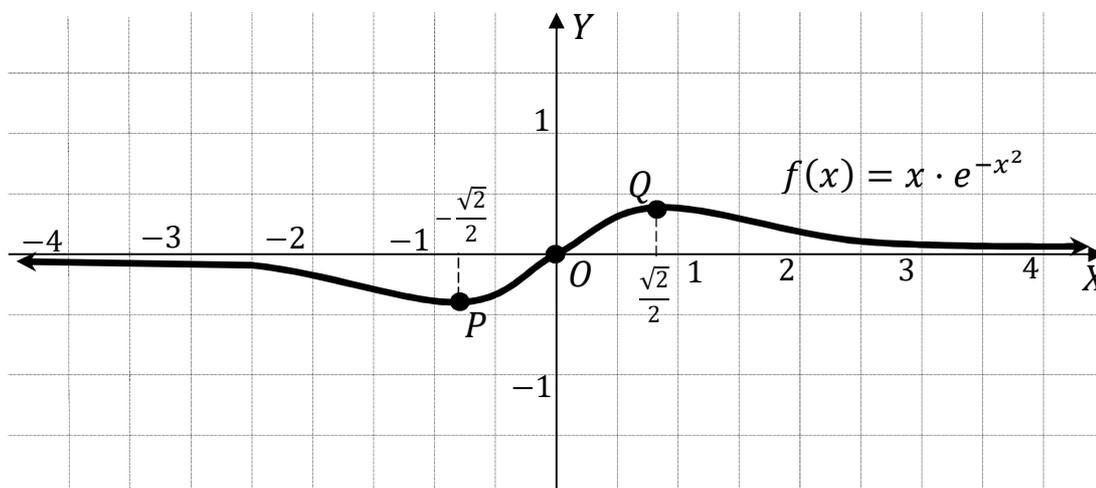
$$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2} \cdot (1-3)}{\sqrt{e}} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo para } x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cong -0,71.$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{e}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} = -\frac{\sqrt{2e}}{2e} \cong -0,43 \Rightarrow \underline{\text{Mín. } P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2e}}{2e}\right)}.$$

$$\text{Por simetría: } \underline{\text{Máx. } Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2e}}{2e}\right)}.$$

b)

Teniendo en cuenta el apartado anterior y que la función pasa por el origen de coordenadas, la representación gráfica, aproximada de la función, es la siguiente:



c)

$$g(x) = f(x) + ax = \frac{x}{e^{x^2}} + ax.$$

La función  $g(x) = \frac{x}{e^{x^2}} + ax$  cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo  $[0, 1]$  cuando:

1. – Es continua en  $[0, 1]$ . Por ser  $g(x)$  la suma de dos funciones continuas en  $\mathbb{R}$  es continua en cualquier intervalo cerrado que se considere  $\forall a \in \mathbb{R}$ .

2. – Es derivable en  $(0, 1)$ . Por ser  $g(x)$  la suma de dos funciones derivables en  $\mathbb{R}$  es derivable en cualquier intervalo abierto finito que se considere  $\forall a \in \mathbb{R}$ .

$$3.- g(0) = g(1).$$

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = 0 \\ g(1) = \frac{1}{e^{1^2}} + a = \frac{1}{e} + a \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{e} + a = 0 \Rightarrow \underline{a = -\frac{1}{e}}.$$

d) El valor de las integrales indefinidas  $I_1 = \int f(x) \cdot dx$  e  $I_2 = \int x \cdot e^{-x} \cdot dx$ .

$$I_1 = \int f(x) \cdot dx = \int x \cdot e^{-x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x^2 = t \\ x \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \int e^t \cdot dt =$$
$$= -\frac{1}{2} \cdot e^t + C = \underline{-\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} + C}.$$

$$I_2 = \int x \cdot e^{-x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} \cdot dx \rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} \cdot dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C =$$
$$= \underline{-e^{-x}(x + 1) + C}.$$

\*\*\*\*\*

## OPCIÓN B

1º) Se da el sistema  $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = a \end{cases}$ , donde  $a$  es un parámetro real. *Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:*

a) Los valores de  $a$  para los que el sistema es compatible y los valores de  $a$  para los que el sistema es incompatible.

b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible.

c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente.

-----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro  $a$  es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} \Rightarrow \{F_1 + 2F_2 = F_3\} \Rightarrow \text{Rang } M = 2.$$

$$\text{Rang } M' \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 7F_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & a - 28 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & a - 14 \end{pmatrix}.$$

Para  $a = 14 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$

Para  $a \neq 14 \Rightarrow \text{Rang } M = 2; \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$

b)

Se resuelve para  $a = 14$ ; el sistema resulta:  $\left. \begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = 14 \end{array} \right\}$ , que es compatible indeterminado.

Despreciando, por ejemplo, la tercera ecuación y haciendo  $z = \lambda$ :

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 4 - \lambda \\ 3x + 4y = 5 - 5\lambda \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3x - 3y = -12 + 3\lambda \\ 3x + 4y = 5 - 5\lambda \end{array} \Rightarrow y = -7 - 2\lambda.$$

$$x = 4 - \lambda - y = 4 - \lambda + 7 + 2\lambda = 11 + \lambda.$$

Solución:  $x = 11 + \lambda, y = -7 - 2\lambda, z = \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

c)

Sea  $b \neq 11$  el nuevo coeficiente que se considera.

Las nuevas matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & b \end{pmatrix} \text{ y } N' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & b & a \end{pmatrix}.$$

$$|N| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & b \end{vmatrix} = 4b + 27 + 35 - 28 - 45 - 3b = b - 11 = 0 \Rightarrow b = 11.$$

Para  $b \neq 11 \Rightarrow \text{Rang } N = \text{Rang } N' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$

$$\text{Rang } N' \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & b & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 7F_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & b-7 & a-28 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & b-11 & a-14 \end{pmatrix}.$$

Para  $\begin{cases} b = 11 \\ a = 14 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } N = \text{Rang } N' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$

Para  $\begin{cases} b = 11 \\ a \neq 14 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } N = 2; \text{Rang } N' = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$

\*\*\*\*\*

2º) Sea el plano  $\pi \equiv 9x + 12y + 20z = 180$ . *Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:*

a) Las ecuaciones de dos planos paralelos a  $\pi$  que distan 4 unidades de  $\pi$ .

b) Los puntos A, B y C intersecciones del plano  $\pi$  con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$ .

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los puntos A, B y C.

-----

a)

La ecuación del haz de planos paralelos a  $\pi \equiv 9x + 12y + 20z - 180 = 0$  es  $\alpha \equiv 9x + 12y + 20z + D = 0$ .

La distancia entre el plano  $\pi$  y otro plano del haz  $\alpha$  es  $d = \frac{|D+180|}{\sqrt{9^2+12^2+20^2}}$ .

Los planos pedidos son los siguientes:

$$4 = \frac{|D+180|}{\sqrt{9^2+12^2+20^2}} = \frac{|D+180|}{\sqrt{81+144+400}} = \frac{|D+180|}{\sqrt{625}} = \frac{|D+180|}{25}$$

$$|D + 180| = 100 \Rightarrow \begin{cases} D_1 + 180 = 100 \rightarrow D_1 = -80 \\ D_2 + 180 = -100 \rightarrow D_2 = -280 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\pi_1 \equiv 9x + 12y + 20z - 80 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv 9x + 12y + 20z - 280 = 0}}$$

b)

$$\pi \equiv 9x + 12y + 20z = 180 \Rightarrow \begin{cases} OX \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 9x = 180 \Rightarrow \underline{A(20, 0, 0)} \\ OY \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 12y = 180 \Rightarrow \underline{B(0, 15, 0)} \\ OZ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 20z = 180 \Rightarrow \underline{C(0, 0, 9)} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0, 15, 0) - (20, 0, 0)] = (-20, 15, 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0, 0, 9) - (20, 0, 0)] = (-20, 0, 9).$$

El ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-20, 15, 0) \cdot (-20, 0, 9)}{\sqrt{(-20)^2 + 15^2} \cdot \sqrt{(-20)^2 + 9^2}} = \\ &= \frac{400 + 0 + 0}{\sqrt{400 + 225} \cdot \sqrt{400 + 81}} = \frac{400}{\sqrt{625} \cdot \sqrt{481}} = \frac{400}{\sqrt{300 \cdot 625}} = \frac{400}{548,29} = 0,7295 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 43^\circ 9' 9''}} \end{aligned}$$

c)

El origen de coordenadas y los puntos A, B y C determinan los vectores:

$$\vec{OA} = (20, 0, 0), \vec{OB} = (0, 15, 0) \text{ y } \vec{OC} = (0, 0, 9).$$

El volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan.

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot \left| \left| \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC} \right| \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot |20 \cdot 15 \cdot 9| =$$

$$= |10 \cdot 5 \cdot 9| = 450.$$

$$\underline{V_{OABC} = 450 \text{ u}^3}.$$

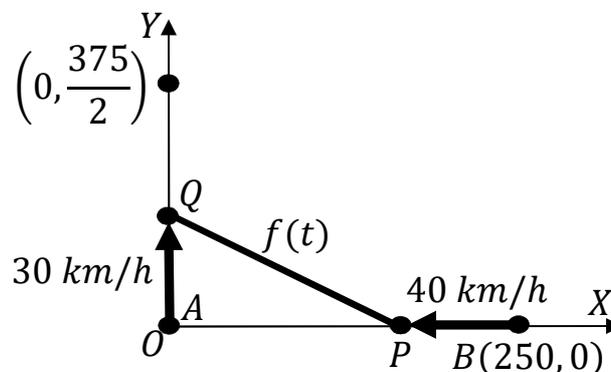
\*\*\*\*\*

3º) Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son  $(0, 0)$  y  $(250, 0)$ , respectivamente, siendo 1 km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$ . El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto  $(0, \frac{375}{2})$  con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h. *Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:*

a) La distancia  $f(t)$  entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo  $t$  en horas desde que comenzaron a desplazarse.

b) El tiempo  $T$  que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $f$  a lo largo del trayecto.

La representación gráfica de la situación se refleja, aproximadamente, en la figura adjunta, donde, al cabo de un tiempo  $t$  el móvil A se encuentra en la posición P y el móvil B se encuentra en la posición Q.



a)

La función que expresa la situación de la distancia entre los móviles A y B es la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $P(250 - 40t, 0)$  y  $Q(0, 30t)$ .

$$f(t) = \sqrt{(30t)^2 + (250 - 40t)^2} = \sqrt{900t^2 + 62.500 - 20.000t + 1.600t^2} =$$

$$= \sqrt{2.500t^2 - 20.000t + 62.500} = 50 \cdot \sqrt{t^2 - 8t + 25}.$$

$$\underline{f(t) = 50 \cdot \sqrt{t^2 - 8t + 25}.$$

b)

$$T_A = \frac{e}{v} = \frac{\frac{375}{2}}{30} = \frac{375}{60} = \frac{75}{12} = \frac{25}{4} = 6,25 \text{ horas} \Rightarrow \underline{T_A = 6 \text{ h y } 15 \text{ minutos.}}$$

$$T_B = \frac{e}{v} = \frac{250}{40} = \frac{25}{4} = \frac{25}{4} = 6,25 \text{ horas} \Rightarrow \underline{T_B = 6 \text{ h y } 15 \text{ minutos.}}$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(t) = 50 \cdot \frac{2t-8}{2 \cdot \sqrt{t^2-8t+25}} = 50 \cdot \frac{t-4}{\sqrt{t^2-8t+25}}.$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 50 \cdot \frac{t-4}{\sqrt{t^2-8t+25}} = 0; \quad t - 4 = 0 \Rightarrow t = 4 \text{ horas.}$$

Decrecimiento:  $f'(x) < 0 \Rightarrow t \in (0, 4 \text{ horas})$ .

Crecimiento:  $f'(x) > 0 \Rightarrow t \in (4 \text{ horas}; 6 \text{ horas } 48 \text{ minutos})$ .

\*\*\*\*\*