PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE VALENCIA

JULIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+3z=a \\ x-2y+2z=5 \\ 3x-y+5z=a+1 \end{cases}$, donde a es un parámetro real. *Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

$a)$ Los valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

$b)$ La solución del sistema cuando $a=-1$.

$c)$ El valor de a para que el sistema tenga una solución (x,y,z) que verifique la ecuación $x+y+z=0$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & a \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & a+1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}=-20-3+18+4=-1\neq 0\Rightarrow Ran\,M=3.$$

$$\underline{\forall a\in R\Rightarrow Rang\,M=Rang\,M'=3=n^{\underline{o}}\,inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.D.}$$

$b)$

Se resuelve por Cramer sin particularizar el parámetro:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ a+1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-10a-15+6(a+1)+2a}{-1} = \frac{-8a-15+6a+6}{-1} = \frac{-2a-9}{-1} = 2a+9.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & a+1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{50+6a+3(a+1)-45-4(a+1)-5a}{-1} = \frac{5+a-a-1}{-1} = \frac{4}{-1} = -4.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & a+1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-4(a+1)-a+6a+10}{-1} = \frac{-4a-4+5a+10}{-1} = \frac{a+6}{-1} = -a-6.$$

$$\underline{Solución\ para\ a = -1 \Rightarrow x = 7,\ y = -4,\ z = -5.}$$

$c)$

Teniendo en cuanta la solución teórica del apartado anterior:

$x + y + z = 0 \Rightarrow (2a+9) - 4 + (-a-6) = 0;\ \ 2a + 9 - 4 - a - 6 = 0;$

$a - 1 = 0 \Rightarrow\ \underline{a = 1}.$

****

2º) Se da el plano $\pi \equiv 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P(10, 0, 10)$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La distancia del punto P al plano π.

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas.

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C.

---

a)

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $P(10, 0, 10)$ y al plano $\pi \equiv 2x + y + 2z - 8 = 0$:

$$d(P, \pi) = \frac{|2\cdot 10+1\cdot 0+2\cdot 10-8|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{|20+0+20-8|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{32}{\sqrt{9}} = \underline{\frac{32}{3}\ unidades.}$$

b)

Los puntos de intersección del plano $\pi \equiv 2x + y + 2z = 8$ con los ejes de coordenadas son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow \begin{Bmatrix} y = 0 \\ z = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4 \Rightarrow A(4, 0, 0).$$

$$Eje\ Y \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 0 \\ z = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow y = 8 \Rightarrow B(0, 8, 0).$$

$$Eje\ Z \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow 2z = 8 \rightarrow z = 4 \Rightarrow C(0, 0, 4).$$

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos.

Los puntos A, B y C determinan los vectores:

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0, 8, 0) - (4, 0, 0)] = (-4, 8, 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0, 0, 4) - (4, 0, 0)] = (-4, 0, 4).$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \begin{Vmatrix} i & j & k \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{Vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |32i + 32k + 16j| =$$

$$= |16i + 8j + 16k| = 8 \cdot |2i + j + 2k| = 8 \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 8 \cdot \sqrt{9} = 24.$$

$$\underline{S_{ABC} = 24\,u^2}.$$

$c)$

El volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que determinan. Los puntos P, A, B y C determinan los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y:

$$\overrightarrow{AP} = [P - A] = [(10, 0, 10) - (4, 0, 0)] = (6, 0, 10).$$

$$V_{PABC} = \frac{1}{6} \cdot \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}\right] = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 10 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (192 + 320) = \frac{1}{6} \cdot 512.$$

$$\underline{V_{PABC} = \frac{512}{6}\,u^3 \cong 85{,}33\,u^3}.$$

****

3º) Se da la función h definida por $h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El dominio de la función h. Los límites $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ y $\lim_{x\to 0} h(x)$.

b) La asíntota de la curva $y = h(x)$.

c) La primitiva de la función h (es decir, $\int h(x) \cdot dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y = 0, x = 1, x = 5$ y la curva $y = h(x)$.

---

a)

El dominio de una función racional es el conjunto de números reales, excepto los valores que anulan el denominador.

$$x^2 + 2x + 5 = 0;\ x = \frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2} \Rightarrow x \notin R \ \Rightarrow \ \underline{D(f) \Rightarrow R}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} = \underline{+\infty}.$$

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} = \underline{-\frac{3}{5}}.$$

b)

La función $h(x)$ no tiene asíntotas verticales por no anularse su denominador para ningún valor real de x. Tampoco tiene asíntotas horizontales por ser finito el límite de la función cuando $x \to \pm\infty$: $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \infty$.

Una función racional tiene una asíntota oblicua cuando el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, tal como ocurre con $h(x)$.

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x\to\infty} [h(x) - mx], \text{ con } m \text{ finito y } m \neq 0.$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^3+2x^2+5x} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [h(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+5x-3-x^3-2x^2-5x}{x^2+2x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2-3}{x^2+2x+5} = -1.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua: y = x - 1.}$$

$c)$

Para el cálculo del área pedida se tiene en cuenta que en el intervalo $(1,5)$ todas las ordenadas de la función $h(x)$ son positivas.

$$S = \int_1^5 h(x)\cdot dx = \int_1^5 \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}\cdot dx.$$

Se resuelve en primer lugar la integral indefinida.

$$A = \int \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}\cdot dx =$$

$$\begin{array}{rrrr|lll} +x^3 & -x^2 & +5x & -3 & x^2 & +2x & +5 \\ -x^3 & -2x^2 & -5x & & x & -1 & \\ \hline & -x^2 & & -3 & & & \\ & +x^2 & +2x & +5 & & & \\ \hline & & 2x & +2 & & & \end{array}$$

$$= \int \left(x - 1 + \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\right)\cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\cdot dx \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2+2x+5 = t \\ (2x+2)\cdot dx = dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{1}{t}\cdot dt =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + Lt = \frac{x^2}{2} - x + L(x^2+2x+5) = A.$$

$$S = \int_1^5 h(x)\cdot dx = \int_1^5 \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}\cdot dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + L(x^2+2x+5)\right]_1^5 =$$

$$= \left[\frac{5^2}{2} - 5 + L(5^2+2\cdot 5+5)\right] - \left[\frac{1^2}{2} - 1 + L(1^2+2\cdot 1+5)\right] =$$

$$= \frac{25}{2} - 5 + L40 - \frac{1}{2} + 1 - L8 = 12 - 4 + L\frac{40}{8} = 8 + L5.$$

$$\underline{S = (8+L5)\,u^2 \cong 9{,}61\,u^2}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los valores de a para los que la ecuación matricial $AX = aX$ solo admite una solución.

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX = 5X$.

c) Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX = 2X$ y, sin calcular la matriz A^{100}, obtener el valor de β tal que $A^{100} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

---

a)

$$\left.\begin{matrix} AX = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 4y \\ -x + 6y \end{pmatrix} \\ aX = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \Rightarrow AX = aX \Rightarrow \begin{pmatrix} x + 4y \\ -x + 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x + 4y = ax \\ -x + 6y = ay \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} (1-a)x + 4y = 0 \\ -x + (6-a)y = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Se ha obtenido un sistema lineal homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas. Según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema tendrá solución única (trivial) cuando el determinante de la matriz de coeficientes tenga rango 2, es decir, que su determinante sea distinto de cero.

La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 1-a & 4 \\ -1 & 6-a \end{pmatrix}$.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1-a & 4 \\ -1 & 6-a \end{vmatrix} = (1-a)(6-a) + 4 = 6 - a - 6a + a^2 + 4 = 0;$$

$a^2 - 7a + 10 = 0;\ a = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow a_1 = 2, a_2 = 5.$

$\underline{La\ ecuación\ matricial\ AX = aX\ tiene\ solución\ única\ \forall a \in R - \{2,5\}.}$

b)

Para $a = 5$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -x + y = 0.$

$\underline{Solución: x = \lambda, y = \lambda, \forall \lambda \in R.}$

$c)$

Para $a = 2$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -x + 4y = 0.$

$Solución: x = 4\lambda, y = \lambda, \forall \lambda \in R, en\ particular\ para\ \lambda = 1 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Sabiendo que $AX = 2X \Rightarrow A = 2$, por lo cual:

$A^{100} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2^{100} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\beta = 2^{100}}.$

****

2º) Se dan en el espacio la recta $r \equiv \frac{x-a}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ y el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros $\alpha\ y\ \beta$.

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha = 6\ y\ \beta = 3$.

c) La ecuación del plano que pasa por $O(0,0,0)$ y que no corta al plano π.

---

a)

La recta r dada por dos ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x-a}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -4x + 4a = -y \\ -4z = \beta y \end{matrix}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 4x - y - 4a = 0 \\ \beta y + 4z = 0 \end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{matrix} 4x - y = 4a \\ \beta y + 4z = 0 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{matrix}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & \beta & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 4a \\ 0 & \beta & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- Rango M = Rango M' = 2 ⇛ La recta está contenida en el plano.

2. -- Rango M =2, Rango M' = 3 ⇛ La recta es paralela al plano.

3. -- Rango M = Rango M' = 3 ⇛ La recta es secante al plano.

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & \beta & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12\beta - 4 - 32 = 12\beta - 36 = 0;\ \ \beta - 3 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \beta = 3$.

$$\underline{Para \left\{\begin{matrix} \beta \neq 3 \\ a \in R \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow r\ y\ \pi\ son\ secantes.}$$

$$Para\ \beta = 3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 4a \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Se determina el rango de M' por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 4a \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 4a \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - 4F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -9 & -12 & 4a-24 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \rightarrow F_3 = -3F_2 \Rightarrow Rang\ M' = 2 \\ a \neq 6 \Rightarrow Rang\ M' = 3 \end{cases}.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} \beta = 3 \\ a = 6 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow r\ está\ contenida\ en\ \pi.}$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} \beta = 3 \\ a \neq 6 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow r\ es\ paralela\ a\ \pi.}$$

b)

Teniendo en cuenta el apartado anterior:

$$\underline{Para\ a = 6\ y\ \beta = 6 \Rightarrow r\ está\ contenida\ en\ \pi \Rightarrow D(r, \pi) = 0}$$

c)

Si dos planos no se cortan es que son paralelos.

El haz de planos γ paralelos a π es $\gamma \equiv x + 2y + 3z + D = 0$ y el plano δ pedido pertenece al haz γ y contiene al punto $O(0, 0, 0)$:

$$\underline{\delta \equiv x + 2y + 3z = 0}.$$

****

3º) Un proyectil está unido al punto $A(0,2)$ por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $B(-2,0)$ y $C(2,0)$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $P(x, 4-x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto $A(0,2)$.

b) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $A(0,2)$ para $-2 \leq x \leq 2$.

c) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia del punto $A(0,2)$ para $-2 \leq x \leq 2$.

d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \leq x \leq 2$.

---

a)

La función $h(x)$ que expresa la distancia entre los puntos $A(0,2)$ y $P(x, 4-x^2)$ es la siguiente:

$$d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (4-x^2-2)^2} = \sqrt{x^2 + (2-x^2)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + 4 - 4x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}.$$

$$\underline{d(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4},\ con - 2 \leq x \leq 2.}$$

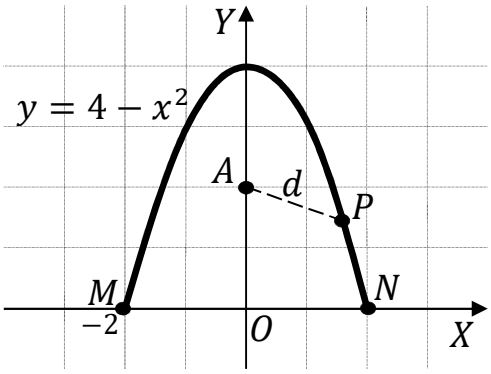
b)

Una función tiene un máximo cuando se anula su primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$d'(x) = \frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}}.$$

$$d'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = 0;\ \ x(2x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{-\sqrt{6}}{2}, x_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

En el caso que nos ocupa y, dada la complejidad de la segunda derivada, es más cómodo al cálculo de las sucesivas distancias para determinar la máxima.



Las distancias son las siguientes:

$$d(0) = \sqrt{4} = 2.$$

Por ser $d(x)$ una función par:

$$d\left(\pm\tfrac{\sqrt{6}}{2}\right) = \sqrt{\left(\tfrac{6}{4}\right)^2 - 3\cdot\tfrac{6}{4} + 4} = \sqrt{\tfrac{9}{4} - \tfrac{18}{4} + 4} = \sqrt{\tfrac{16-9}{4}} = \tfrac{\sqrt{7}}{2} \cong 1{,}23.$$

Los puntos de los extremos de la función son $M(-2,0)$ y $N(2,0)$. La distancia del punto $A(0,2)$ a estos puntos es la siguiente:

$$d_{\overline{AM}} = d_{\overline{AN}} = \sqrt{(0-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \cong 2{,}83.$$

$$\underline{\textit{Los puntos más distantes de } A(0,2) \textit{ son } M(-2,0) \textit{ y } N(2,0).}$$

$c)$

Los puntos de la curva de distancia mínima a $A(0,2)$ son los siguientes:

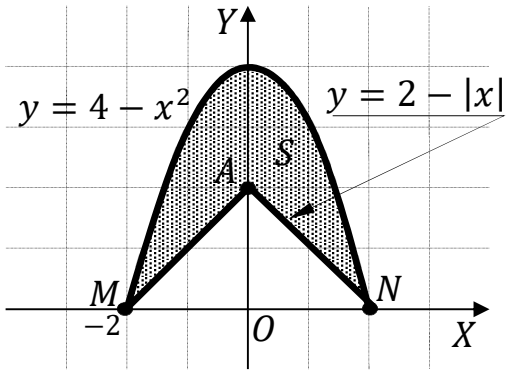
$$y_{\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)} = 4 - \left(\tfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 4 - \tfrac{6}{4} = 4 - \tfrac{3}{2} = \tfrac{5}{2}.$$

$$\underline{\textit{Los puntos más próximos de } A(0,2) \textit{ son } P\left(-\tfrac{\sqrt{6}}{2}, \tfrac{5}{2}\right) \textit{ y } Q\left(\tfrac{\sqrt{6}}{2}, \tfrac{5}{2}\right).}$$

$d)$

Teniendo en cuenta que $|x| = \begin{cases} -x & si\ \ x < 0 \\ x & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$, la función $y = 2 - |x|$ puede expresarse de la forma: $y = \begin{cases} 2 + x & si\ \ x < 0 \\ 2 - x & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura adjunta.



Teniendo en cuenta que son pares las funciones $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = 2\cdot\int_0^2 [(4-x^2) - (2-x)]\cdot dx =$$

$$= 2\int_0^2 (-x^2 + x + 2)\cdot dx = 2\cdot\left[-\tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^2}{2} + 2x\right]_0^2 = 2\cdot\left[\left(-\tfrac{2^3}{3} + \tfrac{2^2}{2} + 2\cdot 2\right) - 0\right] =$$

$$= 2\cdot\left(-\tfrac{8}{3} + 2 + 4\right) = 2\cdot\left(6 - \tfrac{8}{3}\right) = 2\cdot\tfrac{10}{3} = \tfrac{20}{3}.$$

$$\underline{S = \tfrac{22}{3}\ u^2 \cong 7{,}33\ u^2.}$$

****