

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)**UNIVERSIDADES DE VALENCIA****JULIO – 2018**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 1 \\ (a - 1)y + z = 0 \\ x + ay + (a - 1)z = a \end{cases}$, donde a es un parámetro

real. Se pide obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible.

b) Las soluciones del sistema cuando $a = 1$.

c) Las soluciones del sistema cuando $a = 0$.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a - 1 & 1 \\ 1 & a & a - 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a - 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a - 1 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a - 1 & 1 \\ 1 & a & a - 1 \end{vmatrix} = (a - 1)^2 + 1 - a = a^2 - 2a + 1 + 1 - a =$$

$$= a^2 - 3a + 2 = 0; \quad a = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 2.$$

Para $\begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$

$$\text{Para } a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{L_1 = L_3\} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

Para $a = 1 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$

$$\text{Para } a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

Para $a = 2 \Rightarrow \text{Rang } M = 2; \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$

El sistema es compatible $\forall a \in R - \{2\}$.

b)

Para $a = 1$ el sistema resulta $\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$, equivalente al sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$, que es compatible indeterminado; haciendo $y = \lambda$: $x = 1 - \lambda$.

Solución: $x = 1 - \lambda, y = \lambda, z = 0, \forall \lambda \in R$.

c)

Para $a = 0$ el sistema resulta $\begin{cases} x + y = 1 \\ -y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Solución: $x = y = z = \frac{1}{2}, \forall \lambda \in R$.

2º) Se tiene el plano $\pi \equiv x - y + z - 3 = 0$, la recta $s \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto $A(1, 1, 1)$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La recta r que pasa por A, corta a la recta s y es paralela al plano π .

b) El plano β que pasa por A, es perpendicular al plano π y paralelo a la recta s .

c) Discute si el punto $P(3, 2, 1)$ está en la recta t paralela a s que pasa por $Q(5, 3, 1)$.

a)

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es $s \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$.

Un punto genérico de s es $B(2\lambda, \lambda, 0)$.

Un vector director de r es:

$$\vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = B - A = [(2\lambda, \lambda, 0) - (1, 1, 1)] = (2\lambda - 1, \lambda - 1, -1).$$

Un vector normal del plano $\pi \equiv x - y + z - 3 = 0$ es $\vec{n} = (1, -1, 1)$.

Por ser la recta r paralela al plano π , el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares, por lo cual, su producto escalar es cero:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (2\lambda - 1, \lambda - 1, -1) \cdot (1, -1, 1) = 0; \quad 2\lambda - 1 - \lambda + 1 - 1 = 0;$$

$$\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \vec{v}_r = (2 \cdot 1 - 1, 1 - 1, -1) = (1, 0, -1).$$

La expresión de r dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas, es la siguiente:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 1 \\ z = 1 - \mu \end{cases} .}$$

b)

Un vector director de la recta s es $\vec{v}_s = (2, 1, 0)$.

El plano β , por ser perpendicular a π , tiene como vector director al vector normal de π y, por ser paralelo a la recta s , también tiene como vector director al vector director de s . La expresión general de β es la siguiente:

$$\beta(A; \vec{n}, \vec{v}_s) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$2(y - 1) + (z - 1) + 2(z - 1) - (x - 1) = 0;$$

$$-(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0; -x + 1 + 2y - 2 + 3z - 3 = 0.$$

$$\underline{\beta \equiv x - 2y - 3z + 4 = 0.}$$

c)

La recta t paralela a s que pasa por $Q(5, 3, 1)$ es $t \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\delta \\ y = 3 + \delta \\ z = 1 \end{cases}.$

Para que el punto $P(3, 2, 1)$ pertenezca a la recta t tiene que satisfacer su ecuación:

$$t \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\delta \\ y = 3 + \delta \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 + 2\delta = 3 \\ 3 + \delta = 2 \end{cases} \Rightarrow \delta = -1 \Rightarrow P(3, 2, 1).$$

El punto $P(3, 2, 1)$ está en la recta paralela a s que pasa por $Q(5, 3, 1)$.

3º) Consideramos la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \cdot \cos(\pi x)$, que depende de los parámetros a, b, c . Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La relación entre los coeficientes a, b, c sabiendo que $f(x)$ toma el valor 22 cuando $x = 1$.

b) La relación que deben verificar los coeficientes a, b y c para que sea horizontal la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P de dicha curva, sabiendo que la abscisa del punto P es $x = 1$.

c) $I = \int_0^1 x \cdot \cos(\pi x) \cdot dx.$

a)

$$f(1) = 22 \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 \cdot \cos(\pi \cdot 1) = 22;$$

$$a + b + c \cdot \cos \pi = 22; \quad a + b + c \cdot (-1) = 22 \Rightarrow \underline{a + b - c = 22}.$$

b)

El punto P tiene la siguiente expresión: $P[1, f(1)] \approx P(1, 22)$.

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto, por lo cual, por ser la recta horizontal es $m = f'(1) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \cdot [1 \cdot \cos(\pi x) + \pi x \cdot \text{sen}(\pi x)] = \\ &= 3ax^2 + 2bx + c \cdot \cos(\pi x) + c \cdot \pi x \cdot \text{sen}(\pi x). \end{aligned}$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c \cdot \cos(\pi \cdot 1) + c \cdot \pi \cdot 1 \cdot \text{sen}(\pi \cdot 1) = 0;$$

$$3a + 2b + c \cdot (-1) + c \cdot \pi \cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{3a + 2b - c = 0}.$$

c)

$$I = \int_0^1 x \cdot \cos(\pi x) \cdot dx.$$

Se resuelve, en primer lugar, la integral indefinida:

$$A = \int x \cdot \cos(\pi x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ \cos(\pi x) \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{\pi} \cdot \text{sen}(\pi x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \text{sen}(\pi x) - \int \frac{1}{\pi} \cdot \text{sen}(\pi x) \cdot dx = \frac{x}{\pi} \cdot \text{sen}(\pi x) - \frac{1}{\pi} \int \text{sen}(\pi x) \cdot dx =$$

$$= \frac{x}{\pi} \cdot \text{sen}(\pi x) + \frac{1}{\pi^2} \cdot \cos(\pi x) = A.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x \cdot \cos(\pi x) \cdot dx = \left[\frac{x}{\pi} \cdot \text{sen}(\pi x) + \frac{1}{\pi^2} \cdot \cos(\pi x) \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{1}{\pi} \cdot \text{sen} \pi + \frac{1}{\pi^2} \cdot \cos \pi \right] - \left[\frac{0}{\pi} \cdot \text{sen} 0 + \frac{1}{\pi^2} \cos 0 \right] = 0 + \frac{1}{\pi^2} \cdot \cos \pi - 0 - \frac{1}{\pi^2} \cdot \cos 0 = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \cdot (-1) - \frac{1}{\pi^2} \cdot 1 = -\frac{2}{\pi^2}. \end{aligned}$$

$$\underline{I = \int_0^1 x \cdot \cos(\pi x) \cdot dx = -\frac{2}{\pi^2}.$$

OPCIÓN B

1º) Resolver los siguientes apartados, *escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Dados A y B , matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB = A$ y $BA = B$, deducir que $A^2 = A$ y $B^2 = B$.

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, se pide encontrar los parámetros a, b para que la matriz $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ cumpla que $B^2 = B$ pero $AB \neq A$ u $BA \neq B$.

c) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, obtener razonadamente el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

a)

$$A^2 = A \cdot A = (A \cdot B) \cdot A = A \cdot B \cdot A = A \cdot (B \cdot A) = A \cdot B = \underline{A, c. q. d.}$$

$$B^2 = B \cdot B = (B \cdot A) \cdot B = B \cdot A \cdot B = B \cdot (A \cdot B) = B \cdot A = \underline{B, c. q. d.}$$

b)

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{pmatrix}.$$

$$B^2 = B \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ a+b = 1 \\ b^2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \textcircled{1} \rightarrow a = 1, b = 0 \\ \textcircled{2} \rightarrow a = 0, b = 1 \end{cases}.$$

$$\textcircled{1} \rightarrow a = 1, b = 0 \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A \Rightarrow \text{No vale.}$$

$$\textcircled{2} \rightarrow a = 0, b = 1 \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A \Rightarrow \text{Si vale.}$$

$$\textcircled{2} \rightarrow a = 0, b = 1 \Rightarrow B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq B \Rightarrow \text{Si vale.}$$

Los valores que cumplen las condiciones pedidas son $a = 0$ y $b = 1$.

c)

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = \underline{6}.$$

Se ha utilizado la propiedad de los determinantes de que si se multiplica o divide una línea de un determinante por un valor real, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por dicho valor real.

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 0 = \underline{3}.$$

Se han utilizado las dos siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene una línea que es combinación lineal de otras líneas su valor es cero. (en el 2º determinante la primera columna es la suma de las otras dos)

2º) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 4y - z = 8 \end{cases}$, se pide obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r .

b) La ecuación del plano π que es paralelo a la recta r y pasa por los puntos $A(5, 0, 1)$ y $B(4, 1, 0)$.

c) La distancia entre la recta r y el plano π obtenido en el apartado anterior.

a)

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 4y - z = 8 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda; \quad x = 3 - \lambda; \quad z = x + 4y - 8 =$$

$$= 3 - \lambda + 4\lambda - 8 = -5 + 3\lambda = z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -5 + 3\lambda \end{cases}.$$

b)

Un vector director de la recta r es $\vec{v}_r = (-1, 1, 3)$.

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{BA} = [A - B] = (1, -1, 1)$.

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi(A; \vec{v}_r, \overrightarrow{BA}) \equiv \begin{vmatrix} x - 5 & y & z - 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x - 5) + 3y + (z - 1) - (z - 1) + 3(x - 5) + y = 0; \quad 4(x - 5) + 3y = 0;$$

$$(x - 5) + y = 0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv x + y - 5 = 0}.$$

c)

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, 1, 0)$.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (-1, 1, 3) \cdot (1, 1, 0) = -1 + 1 = 0 \Rightarrow \text{La recta } r \text{ es paralela al plano } \pi.$$

La distancia de la recta r al plano π es la misma que la distancia de cualquier punto de la recta al plano. Un punto de la recta r es $P(3, 0, -5)$.

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $P(3, 0, -5)$ y al plano $\pi \equiv x + y - 5 = 0$:

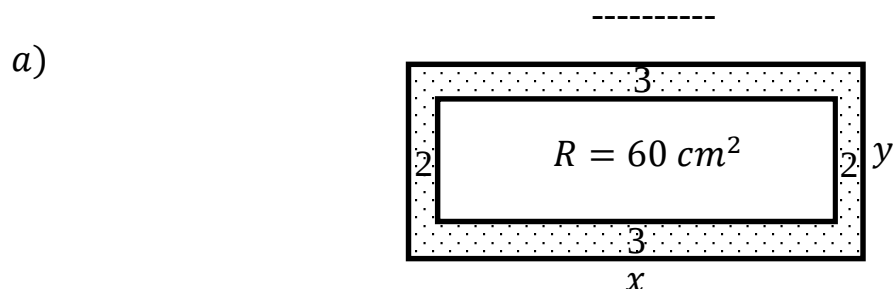
$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-5) - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|3 + 0 + 0 - 5|}{\sqrt{1 + 1 + 0}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2} \text{ unidades}}}.$$

3º) Dentro de una cartulina rectangular se desea hacer un dibujo que ocupe un rectángulo R de 600 cm^2 de área de manera que por encima y por debajo de R deben quedar unos márgenes de 3 cm de altura cada uno. Los márgenes a izquierda y a derecha de R deben tener una anchura de 2 cm cada uno. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El área de la cartulina en función de la base x del rectángulo R .

b) El valor de x para el cual el área de la cartulina es mínima.

c) Las dimensiones de dicha cartulina de área mínima.



De la observación de la figura se deduce que:

$$(x - 4)(y - 6) = 600; \quad xy - 6x - 4y + 24 = 600; \quad xy - 6x - 4y = 576;$$

$$xy - 4y = 576 + 6x; \quad y(x - 4) = 576 + 6x \Rightarrow y = \frac{576+6x}{x-4}.$$

Sustituyendo el valor de y en la expresión de la superficie:

$$S(x, y) = x \cdot y \Rightarrow S(x) = x \cdot \frac{576+6x}{x-4} = 6 \cdot \frac{96x+x^2}{x-4}.$$

$$\underline{S(x) = 6 \cdot \frac{96x+x^2}{x-4}.$$

b)

Para que la superficie sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada y sea positiva su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$S'(x) = 6 \frac{(96+2x) \cdot (x-4) - (96x+x^2) \cdot 1}{(x-4)^2} = 6 \frac{96x-384+2x^2-8x-96x-x^2}{(x-4)^2} = 6 \frac{x^2-8x-384}{(x-4)^2}.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 6 \cdot \frac{x^2-8x-384}{(x-4)^2} = 0; \quad x^2 - 8x - 384 = 0; \quad x = \frac{8 \pm \sqrt{64+1.536}}{2} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{1.600}}{2} = \frac{8 \pm 40}{2} = 4 \pm 20 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -16 < 0 \\ x_2 = 24 \end{cases}.$$

La raíz negativa carece de sentido, por lo cual: $x = 24$.

Se justifica a continuación que el valor hallado es para mínimo:

$$S''(x) = 6 \frac{(2x-8) \cdot (x-4)^2 - (x^2-8x-384) \cdot [2(x-4) \cdot 1]}{(x-4)^4} = 6 \frac{(2x-8) \cdot (x-4) - 2(x^2-8x-384)}{(x-4)^3} =$$
$$= 6 \cdot \frac{2x^2-8x-8x+32-2x^2+16x+768}{(x-4)^3} = 6 \cdot \frac{800}{(x-4)^3} = \frac{5.400}{(x-4)^3}.$$

$$S''(24) = \frac{5.400}{(24-4)^3} = \frac{540}{(20)^3} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo, c. q. j.}$$

$$\underline{x = 24 \text{ cm.}}$$

c)

$$y = \frac{576+6 \cdot 24}{24-4} = \frac{576+144}{20} = \frac{720}{20} = 36.$$

La cartulina de área mínima tiene 24 cm de base y 36 cm de altura.
