

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)**UNIVERSIDAD DE VALENCIA****JULIO – 2017**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $A^2 = -A - I$ y $2B^3 = B$, siendo I la matriz unidad. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

- a) La justificación de que la matriz A es invertible.
- b) Los valores posibles del determinante de B.
- c) El valor del determinante de la matriz B^2 , sabiendo que la matriz B tiene inversa.

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$A^2 = -A - I; \quad A^2 + A = -I; \quad A \cdot (A + I) = -I \Rightarrow |A \cdot (A + I)| = |-I|;$$

$|A||A + I| = -1 \Rightarrow |A| \neq 0, |A + I| \neq 0$, lo cual prueba que:

La matriz A es invertible como queríamos justificar.

b)

Una solución trivial es $|B| = 0$ y otras soluciones son las siguientes:

$$2B^3 = B; \quad 2B^2 \cdot B = B \Rightarrow 2B^2 = I; \quad 2 \cdot B \cdot B = I \Rightarrow |2 \cdot B \cdot B| = |I|;$$

$$|2B||B| = 1; \quad 2^3 \cdot |B||B| = 1; \quad (|B|)^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow |B| = \pm \sqrt{\frac{1}{8}} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\underline{\text{Soluciones: } |B| = 0; |B| = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

c)

$$2B^3 = B; \quad 2B^2 \cdot B = B; \quad 2B^2 \cdot B \cdot B^{-1} = B \cdot B^{-1}; \quad 2B^2 \cdot I = I;$$

$$2 \cdot B \cdot B = I \Rightarrow |2B||B| = 1; \quad 2^3 \cdot |B||B| = 1; \quad |B^2| = \frac{1}{8}.$$

$$\underline{|B^2| = \frac{1}{8}.$$

2º) Se dan la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + mz = n$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

- a) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π se corten en un punto.
- b) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π no se cortan.
- c) Los valores de m y n para los que la recta r está contenida en el plano π .

a)

La recta r y el plano π se corten en un punto cuando el sistema que forman es compatible determinado.

$$\text{La recta } r \text{ y el plano } \pi \text{ determinan el sistema } \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \\ 2x + y + mz = n \end{cases}.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es compatible determinado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e igual al número de incógnitas, es decir, tres.

Para que el rango de ambas matrices sea tres es suficiente que el rango de la matriz de coeficientes sea tres, o sea, que su determinante sea distinto de cero.

$$\text{La matriz de coeficientes es } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = 3m - 2 + 4 + 12 + 1 + 2m = 5m + 15 = 0;$$

$$m + 3 = 0 \Rightarrow m = -3.$$

La recta r y el plano π se cortan en un punto $\forall m \in R - \{-3\}$ y $n \in R$.

b)

La recta r y el plano π no se cortan cuando son paralelos sin ser coincidentes, o sea, cuando el vector normal del plano y el vector director de la recta son perpendiculares y el plano no contiene ningún punto de r .

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

Para determinar un punto y un vector de la recta r se expresa mediante unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \end{array} \right. \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2z = 1 + 2\lambda \\ x - z = 1 - 3\lambda \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + 2z = -1 - 2\lambda \\ x - z = 1 - 3\lambda \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = -5\lambda; \quad x = 1 + 2\lambda - 10\lambda = 1 - 8\lambda \Rightarrow r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 8\lambda \\ y = \lambda \\ z = -5\lambda \end{array} \right.$$

Un punto y un vector director de r son $P(1, 0, 0)$ y $\vec{v}_r = (8, -1, 5)$.

Un vector normal del plano $\pi \equiv 2x + y + mz = n$ es $\vec{n} = (2, 1, m)$.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (8, -1, 5) \cdot (2, 1, m) = 0; \quad 16 - 1 + 5m = 0; \quad 15 + 5m = 0;$$

$$3 + m = 0 \Rightarrow m = -3.$$

$$\pi \notin P \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + y - 3z = n \\ P(1, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + 0 - 0 \neq n \Rightarrow n \neq 2.$$

La recta r y el plano π no se cortan para $m = -3$ y $n \neq 2$.

c)

La recta r está contenida en el plano π cuando tienen infinitos puntos en común, o sea, cuando el sistema que forman es compatible indeterminado.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible indeterminado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales y menores que el número de incógnitas, es decir, menor que tres.

$$\text{Un menor de la matriz de coeficientes es } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } A = 2.$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & n \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } A' = 2 \Rightarrow \{F_1 + F_2 = F_3\} \Rightarrow n = 2.$$

La recta r está contenida en el plano π para $m = -3$ y $n = 2$.

3º) Se consideran las curvas $y = x^3$, $y = ax$ y la función $f(x) = x^3 - ax$, siendo a un parámetro real y $a > 0$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes de coordenadas y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f .

b) La gráfica de la función f cuando $a = 9$.

c) El valor del parámetro a , el área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^3$ e $y = ax$, cuando $a > 1$.

d) El valor del parámetro a para el que el área obtenida en el apartado c) coincide con el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

a)

Corte con el eje Y: $f(x) = x^3 - ax \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \underline{O(0,0)}$.

Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - ax = 0; x(x^2 - a) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 0; x_2 = -\sqrt{a}, x_3 = \sqrt{a} \Rightarrow \underline{O(0,0)}, \underline{P(-\sqrt{a},0)} \text{ y } \underline{Q(\sqrt{a},0)}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 3x^2 - a = 0; x^2 = \frac{a}{3} \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{3a}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{3a}}{3}.$$

Las raíces de la derivada dividen el dominio de la función, que es $\mathbb{R}$, en los tres siguientes intervalos: $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3}, \frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}, +\infty\right)$ que son, alternativamente, crecientes o decrecientes.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0 \in \left(-\frac{\sqrt{3a}}{3}, \frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$ es $f'(0) = -a < 0$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{f(x) \text{ creciente: } f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3a}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3a}}{3}, +\infty\right)}.$$

$$\underline{f(x) \text{ decreciente: } f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{3a}}{3}, \frac{\sqrt{3a}}{3}\right)}.$$

b)

Cuando $a = 9$ la función es $f(x) = x^3 - 9x$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes: $O(0, 0)$, $P(-3, 0)$ y $Q(3, 0)$.

Los puntos máximo y mínimo son los siguientes:

$$f'(x) = 3x^2 - 9 = 0; \quad x^2 = 3 \Rightarrow$$

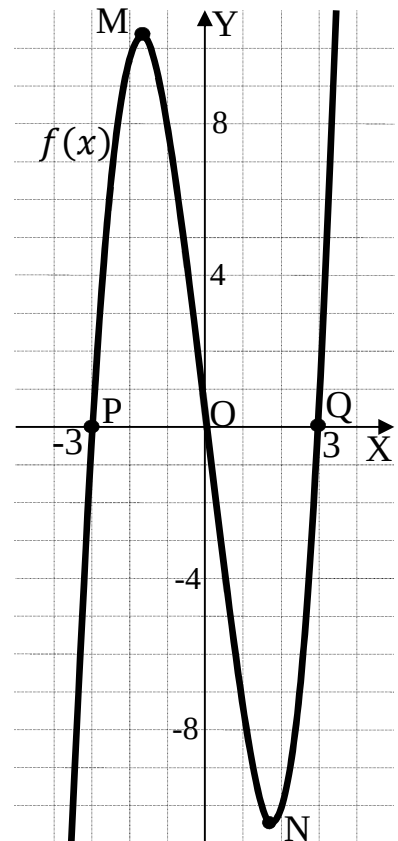
$$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}.$$

Teniendo en cuenta la simetría con respecto al origen de la función por ser $f(-x) = -f(x)$:

$$f(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \cong 10,4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Máx} \Rightarrow M(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3}).$$

$$\text{Por simetría: Mín.} \Rightarrow N(\sqrt{3}, -6\sqrt{3}).$$



La representación gráfica de la función, aproximada, aparece en la figura adjunta.

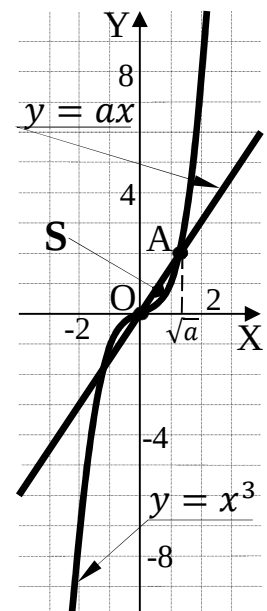
c)

La abscisa del punto de corte de la curva $y = x^3$ con la recta $y = ax$, cuando $a > 1$, es la siguiente:

$$x^3 = ax; \quad x^2 = a \Rightarrow x = +\sqrt{a}.$$

En el intervalo $(0, \sqrt{a})$ las ordenadas de la recta son mayores que las correspondientes ordenadas de la función, por lo cual el área pedida es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{a}} [ax - x^3] \cdot dx = \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{a}} = \\ &= \left[\frac{a \cdot (\sqrt{a})^2}{2} - \frac{(\sqrt{a})^4}{4} \right] - 0 = \frac{a \cdot a}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2 - a^2}{4} = \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$



$$\underline{S = \frac{a^2}{4} u^2.}$$

d)

El área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las

rectas $x = 0$ y $x = 2$ es la siguiente:

$$S = \int_0^2 x^3 \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - 0 = 4.$$

$$\frac{a^2}{4} = 4; \quad a^2 = 16 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow \underline{a = 4}.$$

OPCIÓN B

1º) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

- a) La justificación de que A tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa A^{-1} .
- b) La justificación de que $A^4 = I$.
- c) El cálculo de las matrices A^7 , A^{30} y A^{100} .

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{La matriz } A \text{ es invertible, c. q. j.}}$$

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} (A|I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{F_3 \rightarrow -F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}. \\ &\Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Queda justificado que $A^4 = I$.

c)

$$A^7 = A^4 \cdot A^3 = I \cdot A^3 \Rightarrow A^7 = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

$$A^{30} = (A^4)^7 \cdot A^2 = I^7 \cdot A^2 = A^2 \Rightarrow A^{30} = \underline{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

$$A^{100} = (A^4)^{25} = I^{25} = I \Rightarrow \underline{A^{100} = I}.$$

2º) Se dan la recta $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + bz = 0$, siendo a y b dos parámetros reales. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El punto de intersección de la recta r y el plano π cuando $a = -b = 1$.

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $a = b = 4$.

c) La posición relativa de la recta r y del plano π en función de los valores de los parámetros a y b .

a)

$$\text{Para } a = -b = 1 \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \text{ y } \pi \equiv 2x - y - z = 0.$$

$$\text{La expresión de } r \text{ dada por unas ecuaciones paramétricas es } r \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}.$$

$$\pi \equiv 2x - y - z = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow 2(1 + 4\lambda) - \lambda - (1 - \lambda) = 0;$$

$$2 + 8\lambda - \lambda - 1 + \lambda = 0; \quad 8\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{8}.$$

$$\begin{cases} x = 1 - 4 \cdot \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{8} \\ z = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} \end{cases} \Rightarrow \underline{P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{9}{8}\right)}.$$

b)

$$\text{Para } a = b = 4 \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-1} \text{ y } \pi \equiv 2x - y + 4z = 0.$$

Un punto y un vector director de r son $A(1, 0, 1)$ y $\vec{v}_r = (4, 4, -1)$.

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (2, -1, 4)$.

Como es lógico, la recta r es paralela al plano (en cualquier otro caso la distancia sería cero), para lo cual es necesario que el vector director de la recta sea perpendicular al vector normal del plano, o sea, que su producto escalar tiene que ser cero, como se comprueba a continuación:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (4, 4, -1) \cdot (2, -1, 4) = 8 - 4 - 4 = 0 \Rightarrow \underline{\text{Paralelos, c. q. c.}}$$

La distancia de la recta r al plano π es la misma que la de cualquier punto de r al plano π .

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $A(1, 0, 1)$ y al plano $\pi \equiv 2x - y + 4z = 0$:

$$d(P, \pi) = d(r, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{|2 - 0 + 4|}{\sqrt{4 + 1 + 16}} = \frac{6}{\sqrt{21}} = \frac{6\sqrt{21}}{21} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{21}}{7} \text{ unidades}}}.$$

c)

La expresión de r por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1}; \quad r \equiv \begin{cases} ax - a = 4y \\ -x + 1 = 4z - 4 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} ax - 4y = a \\ x + 4z = 5 \end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema
$$\begin{cases} ax - 4y = a \\ x + 4z = 5 \\ 2x - y + bz = 0 \end{cases}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & b \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & -4 & 0 & a \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1. $\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

2. $\text{Rang } M = 2; \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow$ La recta es paralela al plano.

3. $\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow$ La recta es secante al plano.

$$\begin{aligned} \text{Rang } M \text{ y } M' &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & -4 & 0 & a \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & b & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rotando} \\ \text{filas} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & b & 0 \\ a & -4 & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - aF_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & b-8 & -10 \\ 0 & -4 & -4a & -4a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & b-8 & -10 \\ 0 & 1 & a & a \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & a & a \\ 0 & -1 & b-8 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 + F_2\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & a+b-8 & a-10 \end{pmatrix}.$$

$$a + b - 8 = 0; \quad a = 8 - b$$

$$\text{Para } a = 10 \text{ y } b = -2 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2.$$

Para $a = 10$ y $b = -2 \Rightarrow$ La recta esta contenida en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para } a = 10 \text{ y } b \neq -2 \\ \text{Para } a \neq 10 \text{ y } a + b \neq 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3.$$

$\left. \begin{array}{l} \text{Para } a = 10 \text{ y } b \neq -2 \\ \text{Para } a \neq 10 \text{ y } a + b \neq 8 \end{array} \right\} \Rightarrow$ La recta y el plano son secantes.

$$\text{Para } a \neq 10 \text{ y } a + b \neq 8 \Rightarrow \text{Rang } M = 2; \text{ Rang } M' = 3.$$

Para $a \neq 10$ y $a + b \neq 0 \Rightarrow$ La recta y el plano son paralelos.

3º) Se considera el triángulo T de vértices $O(0,0)$, $A(x,y)$ y $B(0,y)$, siendo $x > 0$, $y > 0$, y tal que la suma de las longitudes de los lados OA y AB es 30 metros. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

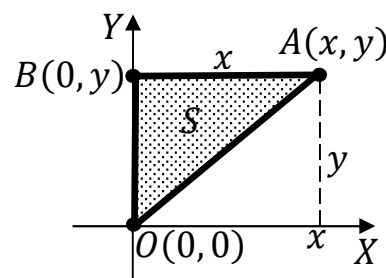
a) El área del triángulo T en función de x .

b) El valor de x para el que dicha área es máxima.

c) El valor de dicha área máxima.

a)

Para facilitar la comprensión del ejercicio se ilustra con un dibujo aproximado de la situación.



$$S = \frac{\text{Base} \times \text{Altura}}{2} = \frac{x \cdot y}{2}. \quad (*)$$

$$\overline{OA} + \overline{AB} = 30; \sqrt{x^2 + y^2} + x = 30;$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 30 - x; x^2 + y^2 = (30 - x)^2 = 900 - 60x + x^2; y^2 = 900 - 60x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{900 - 60x}.$$

Sustituyendo el valor obtenido de y en la expresión (*):

$$S = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{900 - 60x}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{900x^2 - 60x^3}.$$

$$\underline{\underline{S(x) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{900 - 60x}.$$

b)

La condición necesaria para que el área sea máxima es que se anule su primera derivada:

$$S'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1.800x - 180x^2}{2\sqrt{900x^2 - 60x^3}} = 0 \Rightarrow 1.800x - 180x^2 = 0; 180x(10 - x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 10.$$

La solución $x = 0$ carece de sentido y, además, no cumple la condición $x > 0$.

La superficie es máxima para $x = 10$ metros.

c)

$$S(10) = \frac{10}{2} \cdot \sqrt{900 - 60 \cdot 10} = 5 \cdot \sqrt{300} = 50\sqrt{3} \cong 86,60.$$

La superficie máxima es $S = 86,60$ metros cuadrados.
