PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JULIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ -3x+2y+3z=-2 \\ 2x+ay-5z=-4 \end{cases}$, donde a es un parámetro real. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La solución del sistema cuando $a=0$.

b) El valor del parámetro a para el que el sistema es incompatible.

c) Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible y determinado y obtener la solución del sistema en función del parámetro a.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & a & -5 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & a & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & a & -5 \end{vmatrix}=-10+6-6a-8-3a-15=-27-9a=0;$$

$3+a=0 \Rightarrow a=-3.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$Para\ a \neq -3 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.$$

Para $a = 0$ el sistema resulta $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -3x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \end{cases}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-20-12+16-10}{-27} = \frac{-42+16}{-27} = \frac{-26}{-27} = \frac{26}{27}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -5 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{10+24+12+8+12-30}{-27} = \frac{66-30}{-27} = -\frac{36}{27} = -\frac{4}{3}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-8-4-8-12}{-27} = \frac{-32}{-27} = \frac{32}{27}.$$

$$\underline{Para\ a = 0\ la\ solución\ del\ sistema\ es: x = \frac{26}{27}, y = -\frac{4}{3}, z = \frac{32}{27}}.$$

$b)$

$$Para\ a = -3\ es\ A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 18 - 4 - 8 - 6 - 12 \neq 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ A' = 3}.$$

$$Para\ a = -3 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$$

$$\underline{El\ sistema\ es\ incompatible\ para\ a = -3}.$$

$c)$

Según se deduce del apartado a):

$$\underline{El\ sistema\ es\ incompatible\ determinado\ \forall a \in R - \{-3\}}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -4 & a & -5 \end{vmatrix}}{-27-9a} = \frac{-20-12-4a+16-6a-10}{-9(3+a)} = \frac{-26-10a}{-9(3+a)} = \frac{2(13+5a)}{9(a+3)}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ -3 & -2 & 3\\ 2 & -4 & -5\end{vmatrix}}{-27-9a}=\frac{10+24+12+8+12-30}{-9(3+a)}=\frac{66-30}{-9(3+a)}=\frac{36}{-9(3+a)}=\frac{-4}{3+a}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ -3 & 2 & -2\\ 2 & a & -4\end{vmatrix}}{-27-9a}=\frac{-8-6a-4-8+2a-12}{-9(a+3)}=\frac{-32-4a}{-9(a+3)}=\frac{4(8+a)}{9(a+3)}.$$

$$\underline{La\ solución\ del\ sistema\ es: x=\frac{2(13+5a)}{9(a+3)}, y=\frac{-4}{3+a}, z=\frac{4(8+a)}{9(a+3)}.}$$

****

2º) Se dan los puntos $A(0,0,1)$, $B(1,0,-1)$, $C(0,1,-2)$ y $D(1,2,0)$.

Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

b) La justificación de que los cuatro puntos A, B, C y D, no son coplanarios.

c) La distancia del punto D al plano π, y el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D.

----

a)

Los puntos A, B y C determinan los vectores:

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(1,0,-1) - (0,0,1)] = (1,0,-2).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0,1,-2) - (0,0,1)] = (0,1,-3).$$

Considerando el punto $A(0,0,1)$:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0;\ \ z - 1 + 2x + 3y = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0}.$$

b)

Los puntos A, B, C y D son coplanarios si el punto D pertenece al plano π:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ D(1,2,0) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 - 1 = 2 + 6 - 1 = 7 \neq 0.$$

$$\underline{Queda\ justificado\ que\ los\ puntos\ A, B, C\ y\ D\ no\ son\ coplanarios}.$$

c)

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0$ y al punto $D(1,2,0)$:

$$d(D, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 6 - 1|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{7\sqrt{14}}{14} = \underline{\frac{\sqrt{14}}{2}\ unidades}.$$

El volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que los determinan:

$$\overrightarrow{AD} = [D - A] = [(1,2,0) - (0,0,1)] = (1,2,-1).$$

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot \left|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (-1 + 2 + 6) = \underline{\frac{7}{6}\ u^3}.$$

****

3º) Se da la función f definida por $f(x) = x^2 + |x|$, donde x es un número real cualquiera y $|x|$ representa al valor absoluto de x.

Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El punto o puntos donde la gráfica de la función f corta a los ejes coordenados.

b) La justificación de que la curva $y = f(x)$ es simétrica respecto al eje de ordenadas.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

d) La representación gráfica de dicha curva $y = f(x)$.

e) Las integrales definidas $I_1 = \int_{-1}^{0} f(x) \cdot dx$ e $I_2 = \int_{0}^{2} f(x) \cdot dx$.

----

a)

Teniendo en cuenta que $|x| = \begin{cases} -x \; si \; x < 0 \\ x \;\; si \;\; x \geq 0 \end{cases}$ la función $f(x)$ puede redefinirse de la forma siguiente: $f(x) = \begin{cases} x^2 - x \;\; si \;\; x < 0 \\ x^2 + x \;\; si \;\; x \geq 0 \end{cases}$.

La función contiene al origen de coordenadas, por ser $f(0) = 0$.

Además, corta al eje X en los puntos siguientes:

$x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f(x) = x^2 - x = x(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$. No corta al eje X en su parte negativa por no pertenecer $x = 1$ al intervalo $(-\infty, 0)$.

$x \in (0, +\infty) \Rightarrow f(x) = x^2 + x = x(x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1$. No corta al eje X en su parte positiva por no pertenecer $x = -1$ al intervalo $(0, +\infty)$.

$\underline{El \text{ único } punto \; de \; corte \; de \; f(x) \; con \; los \; ejes \; es \; el \; origen.}$

b)

Una función es simétrica con respecto al eje Y cuando $f(-x) = f(x)$.

Utilizando la expresión dada: $f(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |-x| = f(x)$.

$\underline{Queda \; justificado \; que \; f(x) \; es \; simétrica \; respecto \; al \; eje \; de \; ordenadas.}$

c)

$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 \;\; si \;\; x < 0 \\ 2x + 1 \;\; si \;\; x \geq 0 \end{cases}$.

$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (0, +\infty).}$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0).}$$

$d)$

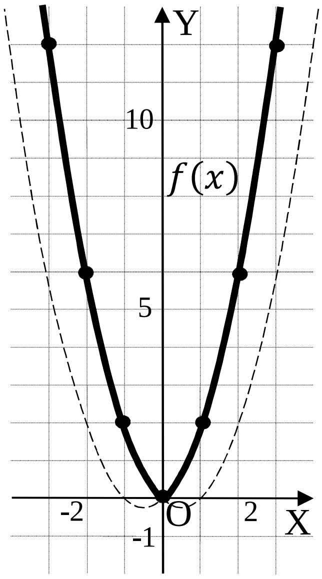
Considerando la parábola $g(x) = x^2 - x$, que es convexa $(\cup)$ y cortas el eje X en el origen y en el punto $A(1,0)$; su vértice es el siguiente:

$$g'(x) = 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$g\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow V_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right).$$

Otros puntos de $g(x)$ son $(-1, 2), (-2, 6), (-3, 12)$.

Considerando la parábola $h(x) = x^2 + x$, que es convexa $(\cup)$ y cortas el eje X en el origen y en el punto $B(-1,0)$; su vértice es el siguiente:



$$h'(x) = 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

$$g\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow V_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right).$$

Otros puntos de $h(x)$ son $(1, 2), (2, 6), (3, 12)$.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece al lado.

$e)$

$$I_1 = \int_{-1}^{0} f(x) \cdot dx = \int_{-1}^{0} (x^2 - x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} =$$

$$= 0 - \left[\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2}\right] = -\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}.$$

$$\underline{I_1 = \int_{-1}^{0} f(x) \cdot dx = \frac{5}{6}.}$$

$$I_2 = \int_{0}^{2} f(x) \cdot dx = \int_{0}^{2} (x^2 + x) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2}\right) - 0 = \frac{8}{3} + 2 =$$

$$= \frac{8+6}{3} = \frac{14}{3}.$$

$$\underline{I_2 = \int_{0}^{2} f(x) \cdot dx = \frac{14}{3}.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El determinante de las matrices $A \cdot (2 \cdot B^2)$ y $A \cdot (2 \cdot B^2) \cdot (3A)^{-1}$.

b) Las matrices A^{-1} y $[(B \cdot A)^{-1} \cdot B]^{-1}$.

c) Las solución de la ecuación matricial $A \cdot X + B \cdot X = 3I$.

----

a)

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot (2 \cdot B^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 8 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 2 \\ 16 & 16 & -2 \\ 6 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$|A \cdot (2 \cdot B^2)| = \begin{vmatrix} 12 & 6 & 2 \\ 16 & 16 & -2 \\ 6 & 8 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 8 & 8 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \cdot (-96 + 32 - 9 - 24 + 24 + 48) = 8 \cdot (80 - 105) = 8 \cdot (-25) = -200.$$

$$\underline{|A \cdot (2 \cdot B^2)| = -200}.$$

También puede hacerse de la forma siguiente: teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de las matrices y que el producto de una matriz por un número es la matriz que resulta de multiplicar todos y cada uno de los elementos de la matriz por el número:

$$|(2 \cdot B^2)| = 2^3 \cdot |B^2| = 8 \cdot |B| \cdot |B|.$$

$$|A \cdot (2 \cdot B^2)| = 8 \cdot |A| \cdot |B \cdot B| = 8 \cdot |A| \cdot |B| \cdot |B|.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 - 1 - 1 = -1.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 1 + 2 = 5.$$

$$\underline{|A \cdot (2 \cdot B^2)| = 8 \cdot (-1) \cdot 5 \cdot 5 = -200.}$$

$$|A \cdot (2 \cdot B^2) \cdot (3A)^{-1}| = |A| \cdot 2^3 \cdot |B| \cdot |B| \cdot \frac{1}{|3A|} = 8 \cdot |A| \cdot |B| \cdot |B| \cdot \frac{1}{3^3 \cdot |A|} =$$

$$= \frac{8}{27} \cdot 5^2 = \frac{200}{27}.$$

$$\underline{|A \cdot (2 \cdot B^2) \cdot (3A)^{-1}| = \frac{200}{27}.}$$

$b)$

Se obtiene la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\} \Rightarrow$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 - F_2 \\ F_3 \to F_3 - F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to -F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 + 3F_3 \\ F_2 \to F_2 - 2F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.}$$

$$[(B \cdot A)^{-1} \cdot B]^{-1} = [A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot B]^{-1} = [A^{-1} \cdot I]^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A.$$

$$\underline{[(B \cdot A)^{-1} \cdot B]^{-1} = A.}$$

$c)$

$A \cdot X + B \cdot X = 3I$; $(A + B) \cdot X = 3I$. Multiplicando por la izquierda los dos términos por $(A + B)^{-1}$:

$$(A + B)^{-1} \cdot (A + B) \cdot X = (A + B)^{-1} \cdot (3I); \;\; I \cdot X = (A + B)^{-1} \cdot (3I) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\boldsymbol{X = (A + B)^{-1} \cdot (3I)}.$$

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

$(A+B)^{-1}$ se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $(A+B)^{-1}=\frac{Adj.\ de\ (A+B)^t}{|A+B|}$.

$$|A+B|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=6-6+6-3=3. \quad (A+B)^t=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

$$Adj. de\ (A+B)^t=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 12\\ 3 & 2 & -9\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)^{-1}=\frac{Adj.\ de\ (A+B)^t}{|A+B|}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -2 & 12\\ 3 & 2 & -9\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

$$X=(A+B)^{-1}\cdot(3I)=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -2 & 12\\ 3 & 2 & -9\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}\cdot 3I=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 12\\ 3 & 2 & -9\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

$$\underline{X=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 12\\ 3 & 2 & -9\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}.}$$

****

2º) Se dan los planos $\pi \equiv x + y + z = 1$ y $\sigma \equiv ax + by + z = 0$, donde a y b son dos parámetros reales.

Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los valores de a y b para los que el plano σ pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y, además, dicho plano σ es perpendicular al plano π.

b) Los valores de a y b para los cuales sucede que el plano σ pasa por el punto $Q(0, 1, 1)$ y la distancia del punto $M(1, 0, 1)$ al plano σ es 1.

c) Los valores de a y b para los que la intersección de los planos $\pi\ y\ \sigma$ es la recta r para la que el vector $\vec{v} = (3, 2, -5)$ es un vector director de la recta r, y obtener un punto cualquiera de la recta r.

----

a)

Si el plano σ pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{c} \sigma \equiv ax + by + z = 0 \\ P(1, 2, 3) \end{array}\right\} \Rightarrow a + 2b + 3 = 0;\ \ a + 2b = -3. \qquad (1)$$

Si el plano σ es perpendicular al plano π, sus vectores normales también son perpendiculares.

$$\overrightarrow{n_\pi} = (1, 1, 1)\ y\ \overrightarrow{n_\sigma} = (a, b, 1).$$

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{n_\pi} \cdot \overrightarrow{n_\sigma} = (1, 1, 1) \cdot (a, b, 1) = a + b + 1 = 0;\ \ a + b = -1. \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a + 2b = -3 \\ a + b = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} a + 2b = -3 \\ -a - b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{b = -2},\ \underline{a = 1}.$$

b)

Si el plano σ pasa por el punto $Q(0, 1, 1)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{c} \sigma \equiv ax + by + z = 0 \\ Q(0, 1, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow b + 1 = 0\ \Rightarrow\ \underline{b = -1}.$$

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\sigma \equiv ax - y + z = 0$ y al punto $M(1, 0, 1)$:

$$d(M,\sigma)=1\Rightarrow\frac{|a\cdot 1-0+1|}{\sqrt{a^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{|a+1|}{\sqrt{a^2+1+1}}=\frac{a+1}{\sqrt{a^2+2}}=1\ \Rightarrow\ a+1=\sqrt{a^2+2};$$

$$a^2+2a+1=a^2+2;\ \ 2a=1\ \Rightarrow\ \underline{a=\tfrac{1}{2}}.$$

$c)$

La recta r intersección de $\pi\equiv x+y+z=1$ y $\sigma\equiv ax+by+z=0$ tiene la expresión: $r\equiv\begin{cases}x+y+z=1\\ax+by+z=0\end{cases}$.

Un vector director de una recta dada por la intersección de dos planos es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan

$$\left.\begin{cases}\overrightarrow{n_1}=(1,1,1)\\\overrightarrow{n_2}=(a,b,1)\end{cases}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{v'_r}=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&1&1\\a&b&1\end{vmatrix}=i+aj+bk-ak-bi-j=$$

$$=(1-b)i+(a-1)j+(b-a)k=(3,2,-5)\Rightarrow\left.\begin{cases}1-b=3\\a-1=2\\b-a=-5\end{cases}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a=3,b=-2\ \ \Rightarrow\ \ \underline{r\equiv\begin{cases}x+y+z=1\\3x-2y+z=0\end{cases}}.$$

Un punto cualquiera de r es una solución del sistema compatible indeterminado que forman las ecuaciones de la recta, por ejemplo, haciendo x = 0:

$$\left.\begin{array}{r}y+z=1\\-2y+z=0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}y+z=1\\2y-z=0\end{array}\right\}\Rightarrow 3y=1;y=\tfrac{1}{3};\ \ z=1-\tfrac{1}{3}=\tfrac{2}{3}.$$

$$\underline{Un\ punto\ de\ r\ es\ N\left(0,\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right)}.$$

****

3º) La diferencia de potencial "x" entre dos puntos de un circuito eléctrico provoca el paso de una corriente eléctrica de intensidad "y", que está relacionada con la diferencia de potencial "x" por la ecuación $y = -x^2 - x + 6$, siendo $0 \leq x \leq 2$.

Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La gráfica de la función $f(x) = -x^2 - x + 6$ y deducir, gráfica o analíticamente, el valor de la intensidad "y" cuando la diferencia de potencial "x" es 0 y el valor de la diferencia de potencial "x" al que corresponden una intensidad "y" igual a 0, siendo $0 \leq x \leq 2$.

b) El valor de la diferencia de potencial "x" para el que es máximo el producto $y \cdot x$ de la intensidad "y" por la diferencia de potencial "x", cuando $0 \leq x \leq 2$, y obtener el valor máximo de dicho producto $y \cdot x$, cuando $0 \leq x \leq 2$.

c) El área de la superficie situada en el primer cuadrante limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y el eje de ordenadas.

----

a)

La función $f(x) = -x^2 - x + 6$ es cóncava $(\cap)$ y su vértice es el siguiente:

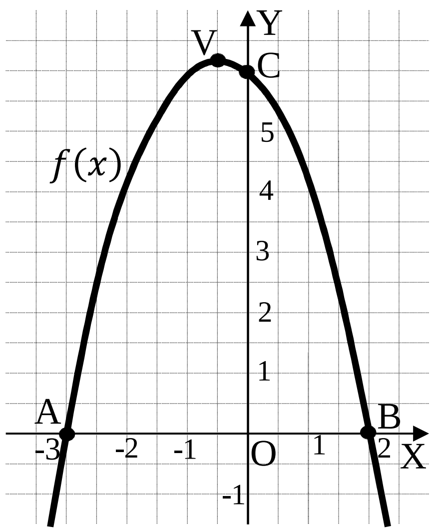
$y'(x) = -2x - 1.$ $\qquad$ $y'(x) = 0 \Rightarrow -2x - 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}.$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = \frac{-1+2+24}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow V\left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right).$$

Los puntos de corte con el eje X de la parábola son los siguientes:

$$-x^2 - x + 6 = 0;\ \ x^2 + x - 6 = 0;\ \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boldsymbol{x_1 = -3, x_2 = 2} \Rightarrow A(-3, 0)$ y $B(2, 0)$.



La representación gráfica, aproximada, de la situación se indica en la figura adjunta.

Analíticamente se deduce el valor de la función para x = 0: $f(0) = 6$, así como los valores de x que anulan la función, que son x = -3 y x = 2, pero como tiene que ser $0 \leq x \leq 2$, solamente vale el valor positivo de x.

Gráficamente los valores pedidos son los puntos C y B, respectivamente.

$b)$

La función producto $P(x) = x \cdot y = x \cdot (-x^2 - x + 6) = -x^3 - x^2 + 6x$.

$P'(x) = -3x^2 - 2x + 6$.

La condición necesaria para que una función tenga un máximo en un punto es que se anule su primera derivada y sea negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$P'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 - 2x + 6 = 0;\ \ 3x^2 + 2x - 6 = 0;\ \ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+72}}{2 \cdot 3} =$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 19}}{6} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{19}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{-1-\sqrt{19}}{3}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{19}}{3}.$$

La solución $x_1 = \frac{-1-\sqrt{19}}{3}$ se deshecha por no cumplir la condición $0 \le x \le 2$.

$$\underline{El\ producto\ y \cdot x\ es\ máximo\ para\ x = \frac{-1+\sqrt{19}}{3}}.$$

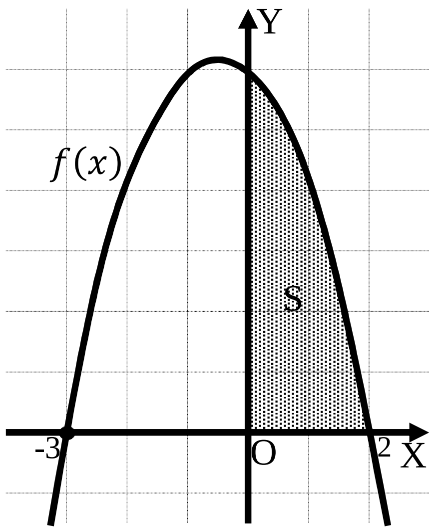
El valor del producto máximo $y \cdot x$ es el siguiente, considerando el valor aproximado de $x = \frac{-1+\sqrt{19}}{3} \cong 1{,}12$:

$$P(1{,}12) = -1{,}12^3 - 1{,}12^2 + 6 \cdot 1{,}12 = -1{,}40 - 1{,}25 + 6{,}72 = 4{,}07,$$

$$\underline{El\ valor\ máximo, aproximado\ del\ producto\ y \cdot x\ es\ 4{,}07.}$$

$c)$

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:



$$S = \int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^2 (-x^2 - x + 6\,)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]_0^2 = \left(-\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 6 \cdot 2\right) - 0 =$$

$$= -\frac{8}{3} - 2 + 12 = 10 - \frac{8}{3} = \frac{30-8}{3} = \frac{22}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{22}{3}\ u^2.}$$

****