PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2014

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá sólo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.

Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica para la realización del examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=k-2 \\ x+k^2y+3z=2k \end{cases}$, donde k es un parámetro real, se pide:

a) Discutir razonadamente el sistema según los valores de k

b) Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado, todas las soluciones del sistema cuando k = -1.

c) Resolver razonadamente el sistema cuando k = 0.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & k^2 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & k-2 \\ 1 & k^2 & 3 & 2k \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de k es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & k^2 & 3 \end{vmatrix} = 12+15+4k^2-8-5k^2-18 = 1-k^2 = 0 \Rightarrow \underline{k_1=-1} \;;\; \underline{k_2=1}.$$

$$\underline{\underline{Para \; \left.\begin{cases} k \neq -1 \\ k \neq 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow Rango \; M = Rango \; M' = 3 = n^{\circ} \; incóg. \Rightarrow Compatible \; \text{determinado}}}$$

$$Para \; k=-1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 - C_3 = C_4\} \Rightarrow \underline{Rango \; de \; M' = 2}$$

$$\underline{\underline{Para \; k=-1 \Rightarrow Rango \; M = Rango \; M' = 2 < n^{\circ} \; incóg. \Rightarrow Compatible \; \text{indeterminado}}}$$

$$Para \; k=1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1, \; C_2, \; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8-2-3+4+1-12 =$$

$$= 13-17 = -4 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \; M' = 3}.$$

$$\underline{\underline{Para \; k=1 \Rightarrow Rango \; M = 2 \;;\; Rango \; M' = 3 \Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Para k = -1 el sistema es $\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=-3 \\ x+y+3z=-2 \end{cases}$, que es compatible indeterminado como se ha probado en el apartado anterior. Para resolverlo se desprecia una de las ecuaciones, por ejemplo la segunda, y se parametriza una de las ecuaciones, por ejemplo $z=\lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y=-1-2\lambda \\ x+y=-2-3\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+3y=-1-2\lambda \\ -x-y=2+3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=1+\lambda \;;\; \underline{y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda} \;;\; x=-2-3\lambda-y=$$

$$=-2-3\lambda-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda = \underline{-\frac{5}{2}-\frac{7}{2}\lambda = x}.$$

$$\underline{\underline{Solución: \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{5}{2}-\frac{7}{2}\lambda \\ x=-\frac{5}{2}-\frac{7}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}, \; \forall \lambda \in R}}$$

c)

Para k = 0 el sistema es $\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=-2 \\ x+3z=0 \end{cases}$, que es compatible determinado. Se resuelve del modo siguiente: de la tercera ecuación $x=-3z$. Sustituyendo en las otras ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} -3z+3y+2z=-1 \\ -6z+4y+5z=-2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3y-z=-1 \\ 4y-z=-2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -3y+z=1 \\ 4y-z=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=-1} \;;;\; -3-z=-1 \;;;\; \underline{z=-2}\,.$$

$$\underline{\underline{So\acute{}lución:\; x=6,\;\; y=-1,\;\; z=-2}}$$

****

2º) Se dan el punto A(-1, 0, 2) y las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z-2$ y $s \equiv \begin{cases} x = -1-2\lambda \\ y = 1+3\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación del plano π que pasa por el punto A y contiene a la recta r.

b) La ecuación del plano σ que pasa por el punto A y es perpendicular a la recta s.

c) Un vector dirección de la recta ℓ intersección de los planos π y σ y la distancia entre las rectas s y ℓ.

----

a)

Un punto y un vector director de las rectas r y s son $\overrightarrow{v_r} = (2,\ 3,\ 1)$, M(1, 0, 2) y $\overrightarrow{v_s} = (-2,\ 3,\ 1)$, N(-1, 1, 1), respectivamente.

Los puntos A y M determinan el vector $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AM} = M - A = (2,\ 0,\ 0)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_s} = (-2,\ 3,\ 1)$ y $\overrightarrow{w} = (2,\ 0,\ 0)$ son directores del plano π pedido, cuya ecuación general es la siguiente: $\pi(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{w}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$;; $2y - 6(z-2) = 0$;;

$y - 3(z-2) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv y - 3z + 6 = 0}}$.

b)

El haz de planos β perpendiculares a la recta s tienen como vector normal al vector director de s; su expresión general es $\pi \equiv -2x + 3y + z + D = 0$.

De los infinitos planos de β, el plano σ es el que contiene al punto A(-1, 0, 2), por lo que tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv -2x + 3y + z + D = 0 \\ A(-1,\ 0,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow -2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 2 + D = 0 \ ;;\ 2 + 2 + D = 0 \ ;;\ \underline{D = -4}.$$

$$\underline{\underline{\sigma \equiv -2x + 3y + z - 4 = 0}}$$

c)

La recta ℓ intersección de los planos π y σ es $\ell \equiv \begin{cases} y - 3z + 6 = 0 \\ -2x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$. Para determinar un punto y un vector director de ℓ se expresa por unas ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} y - 3z + 6 = 0 \\ -2x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \mu \Rightarrow y = -6 + 3\mu \ ;;\ 2x = 3y + \mu - 4 = -18 + 9\mu + \mu - 4 =$$

$$= -22 + 10\mu \;;\; x = -11 + 5\mu \Rightarrow \underline{\ell \equiv \begin{cases} x = -11 + 5\mu \\ y = -6 + 3\mu \\ z = \mu \end{cases}} \Rightarrow \underline{\underline{\overrightarrow{v_\ell} = (5,\ 3,\ 1)}}\ y\ \underline{C(-11,\ -6,\ 0)}.$$

Para hallar la distancia entre las rectas s y ℓ tenemos en cuenta que la recta s es perpendicular al plano σ por lo cual es perpendicular a todas las rectas contenidas en ese plano; como la recta ℓ está contenida en el plano σ, las rectas s y ℓ son perpendiculares.

Un punto genérico de la recta s es $P(-1-2\lambda,\ 1+3\lambda,\ 1+\lambda)$.

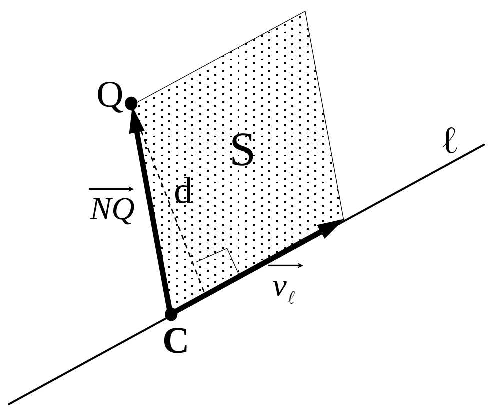
El punto Q de intersección de la recta s con el plano σ es el que satisface sus expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma \equiv -2x + 3y + z - 4 = 0 \\ P(-1-2\lambda,\ 1+3\lambda,\ 1+\lambda) \end{array}\right\} \Rightarrow -2\cdot(-1-2\lambda) + 3\cdot(1+3\lambda) + (1+\lambda) - 4 = 0 \;;$$

$$2 + 4\lambda + 3 + 9\lambda + 1 + \lambda - 4 = 0 \;;\; 14\lambda + 2 = 0 \rightarrow \underline{\lambda = -\frac{1}{7}} \rightarrow \begin{cases} x = -1 + \frac{2}{7} = -\frac{5}{7} \\ y = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7} \\ z = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow \underline{Q\left(-\frac{5}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{6}{7}\right)}.$$

La distancia entre s y ℓ es la misma que la distancia de Q a ℓ.

La distancia d del punto Q a la recta ℓ puede determinarse teniendo en cuenta que C(-11, -6, 0) es un punto de ℓ y $\overrightarrow{v_\ell} = (5,\ 3,\ 1)$ es el vector director de la recta ℓ.



Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un gráfico aproximado de la situación.

Teniendo en cuenta que $S = d \cdot \left|\overrightarrow{v_\ell}\right|$ y que también puede ser $S = \left|\overrightarrow{v_\ell} \wedge \overrightarrow{CQ}\right|$, se deduce que la distancia es: $d(Q,\ \ell) = \dfrac{\left|\overrightarrow{v_\ell} \wedge \overrightarrow{CQ}\right|}{\left|\overrightarrow{v_\ell}\right|}$.

El vector $\overrightarrow{CQ}$ es: $\overrightarrow{CQ} = Q - C = \left(-\frac{5}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{6}{7}\right) - (-11,\ -6,\ 0) = \left(\frac{72}{7},\ \frac{46}{7},\ \frac{6}{7}\right)$.

Aplicando la fórmula de la distancia:

$$d(Q,\ \ell)=\frac{\left|\overrightarrow{v_\ell}\wedge\overrightarrow{CQ}\right|}{\left|\overrightarrow{v_\ell}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k\\ 5 & 3 & 1\\ \frac{72}{7} & \frac{46}{7} & \frac{6}{7}\end{matrix}\right\|}{\sqrt{5^2+3^2+1^2}}=\frac{\frac{2}{7}\left\|\begin{matrix} i & j & k\\ 5 & 3 & 1\\ 36 & 23 & 3\end{matrix}\right\|}{\sqrt{25+9+1}}=\frac{2\left|9i+36j+115k-108k-23i-15j\right|}{7\cdot\sqrt{35}}=$$

$$=\frac{2\left|-14i+21j+7k\right|}{7\cdot\sqrt{35}}=\frac{2\left|-2i+3j+1k\right|}{\sqrt{35}}=\frac{2\sqrt{(-2)^2+3^2+1^2}}{\sqrt{35}}=\frac{2\sqrt{4+9+1}}{\sqrt{35}}=\frac{2\cdot\sqrt{14}}{\sqrt{35}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}}=$$

$$=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\underline{\underline{\frac{2\sqrt{10}}{5}\ unid.=d(s,\ \ell)}}.$$

****

3º) Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El valor de m para el cual la función $f(x)=\begin{cases} m(x+1)\cdot e^{2x}, & x\le 0 \\ \frac{(x+1)sen\ x}{x}, & x>0 \end{cases}$ es continua en x = 0.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y=(x+1)\cdot e^{2x}$.

c) La integral $I=\int(x+1)e^{2x}\cdot dx$, y el área limitada por la curva $y=(x+1)\cdot e^{2x}$ y las rectas x = 0, x = 1 e y = 0.

----

a)

La función f(x) es continua para todo R, excepto para el valor x = 0, que es dudosa su continuidad. Para que la función sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para\ \ x=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[m\left(1-x^2\right)\cdot e^{2x}\right]=f(0)=\underline{m} \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)sen\ x}{x}=\underline{1}\quad (*) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{m=1}.$$

$$(*)\ \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)sen\ x}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x}=1\cdot 1=\underline{1}.$$

La función f(x) es continua en toda la recta real para m = 1.

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$y'=1\cdot e^{2x}+(x+1)\cdot 2\cdot e^{2x}=e^{2x}[1+(x+1)\cdot 2]=(2x+3)\cdot e^{2x}.$$

$$y'=0 \Rightarrow (2x+3)\cdot e^{2x}=0\ ;;\ (2x+3)=0 \Rightarrow \underline{x=-\frac{3}{2}}$$

$$y'(x)<0 \Rightarrow x<-\frac{3}{2} \Rightarrow Decrecimiento:\left(-\infty,\ -\frac{3}{2}\right)$$

$$y'(x)>0 \Rightarrow x>-\frac{3}{2} \Rightarrow Crecimiento:\left(-\frac{3}{2},\ +\infty\right)$$

c)

$$I=\int(x+1)e^{2x}\cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u=x+1\to du=dx \\ dv=e^{2x}\cdot dx\to v=\frac{1}{2}\cdot e^{2x} \end{array} \right\} \Rightarrow (x+1)\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot dx=$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot dx = \frac{1}{2}(x+1)\cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x} + C = \frac{1}{4}e^{2x}\left[2(x+1)-1\right] + C\,.$$

$$\underline{\underline{I = \frac{1}{4}(2x+1)\cdot e^{2x} + C}}$$

En el intervalo [0, 1] todas las ordenadas de la curva $y = (x+1)\cdot e^{2x}$ son positivas, por lo que el área pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^1 (x+1)\cdot e^{2x}\cdot dx = \left[\frac{1}{4}(2x+1)\cdot e^{2x}\right]_0^1 = \left[\frac{1}{4}(2+1)\cdot e^{2}\right] - \left[\frac{1}{4}(0+1)\cdot e^{0}\right] = \frac{3e^2}{4} - \frac{1}{4}\,.$$

$$\underline{\underline{S = \frac{3e^2-1}{4}\,u^2 \cong 5'29\,u^2}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, obtener razonadamente el valor de los determinantes siguientes, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La matriz inversa A^{-1} de la matriz A.

b) La matriz X que es solución de la ecuación A · X = B · C.

c) El determinante de la matriz $2M^3$, siendo M una matriz cuadrada de orden 2 cuyo determinante vale ½.

----

a)

La inversa de A se obtiene utilizando el método de Gauss-Jordan:

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1+F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}F_1 \to F_1-2F_3\\ F_2 \to F_2-F_3\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}} \Rightarrow \underline{\underline{|A^{-1}|=1}}.$$

b)

$$A \cdot X = B \cdot C \;;;\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \cdot C \;;;\; I \cdot X = A^{-1} \cdot B \cdot C \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot B \cdot C}.$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 6\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}}.$$

$|X|=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 6\\ 1 & -1 & -3\end{vmatrix}=0$, por líneas paralelas proporcionales.

$$\underline{\underline{|X|=0}}$$

c)

Para hallar el determinante de la matriz $2M^3$ debemos tener en cuenta que:

1.- El producto de una matriz por un número es la matriz que resulta de multiplicar todos y cada uno de los elementos de la matriz por el número.

2.- Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número real, el valor del determinante de la matriz es el producto del número por el determinante de la matriz.

3.- El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices.

$$\left|2 \cdot M^3\right| = \left|2 \cdot M \cdot M \cdot M\right| = \left|2 \cdot M\right| \cdot \left|M\right| \cdot \left|M\right| = \left(2^2 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}\,.$$

****

2º) Se da el triángulo T de vértices A(1, 2, -2), B(0, -3, 1) y C(-1, 0, 0) y los planos siguientes: $\pi_1 \equiv x+y+z+1=0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x=-\alpha+\beta+1 \\ y=\alpha-2\beta \\ z=\alpha+\beta \end{cases}$. Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

a) La posición relativa del plano π_1 y del plano que contiene al triángulo T.

b) Un vector $\overrightarrow{n_1}$ perpendicular al plano π_1 y un vector $\overrightarrow{n_2}$ perpendicular al plano π_2 y el coseno del ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$.

c) Las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

----

a)

Los puntos A, B y C determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(0,\ -3,\ 1)-(1,\ 2,\ -2)=(-1,\ -5,\ 3).$$

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}=C-A=(-1,\ 0,\ 0)-(1,\ 2,\ -2)=(-2,\ -2,\ 2).$$

Los puntos A, B y C determinan el plano $\pi(C;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ -1 & -5 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0$;;

$$-10(x+1)-6y+2z-10z+6(x+1)+2y=0\ ;;\ -4(x+1)-4y-8z=0\ ;;\ x+1+y+2z=0\ ;;$$

$$\Rightarrow \underline{\pi \equiv x+y+2z+1=0}.$$

Los vectores normales de los planos π y π_1 son $\overrightarrow{n}=(1,\ 1,\ 2)$ y $\overrightarrow{n_1}=(1,\ 1,\ 1)$, respectivamente; como sus componentes no son proporcionales:

<u>Los planos π y π_1 son secantes</u>.

b)

Dos vectores directores del plano π_2 son $\overrightarrow{v_1}=(-1,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_2}=(1,\ -2,\ 1)$, respectivamente. Un vector normal a π_2 es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de sus vectores directores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$:

$$\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{v_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=i+j+2k-k+2i+j=3i+2j+k=(3,\ 2,\ 1) \Rightarrow \underline{\underline{\overrightarrow{n_2}=(3,\ 2,\ 1)}}.$$

Del apartado anterior se sabe que $\underline{\underline{\overrightarrow{n_1}=(1,\ 1,\ 1)}}$.

Por el concepto de producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = \left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{(1,\ 1,\ 1)\cdot(3,\ 2,\ 1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2+1^2}} =$$

$$= \frac{3+2+1}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{9+4+1}} = \frac{6}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}} = \underline{\underline{\frac{6}{\sqrt{42}} \cong 0'9258 = \cos\alpha}} \Rightarrow \underline{\alpha = 22^{\circ}\ 12'\ 28''}.$$

c)

Un punto de $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -\alpha+\beta+1 \\ y = \alpha - 2\beta \\ z = \alpha+\beta \end{cases}$ es A(1, 0, 0) y del apartado b) se sabe que un vector normal del plano π_2 es $\overrightarrow{n_2} = (3,\ 2,\ 1)$. La expresión general de π_2 es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_2 \equiv 3x+2y+z+D=0 \\ A(1,\ 0,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 3+0+0+D=0\ ;;\ D=-3 \Rightarrow \underline{\pi_2 \equiv 3x+2y+z-3=0}.$$

Los planos π_1 y π_2 determinan la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 3x+2y+z-3=0 \end{cases}$; su expresión por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 3x+2y+z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=-1-\lambda \\ 3x+2y=3-\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x-2y=2+2\lambda \\ 3x+2y=3-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x=5+\lambda}\ ;;$$

$$y=-x-1-\lambda=-5-\lambda-1-\lambda=\underline{-6-2\lambda=y}.$$

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x=5+\lambda \\ y=-6-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

3º) Se tiene un cuadrado de mármol de lado 80 cm. Se produce la rotura de una esquina y queda un pentágono de vértices A(0, 20), B(20, 0), C(80, 0), D(80, 80) y E(0, 80). Para obtener una pieza rectangular se elige un punto P(x, y) del segmento AB y se hacen dos cortes paralelos a los ejes X e Y. Así se obtiene un rectángulo R cuyos vértices son los punto P(x, y), F(80, y), D(80, 80) y G(x, 80). Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

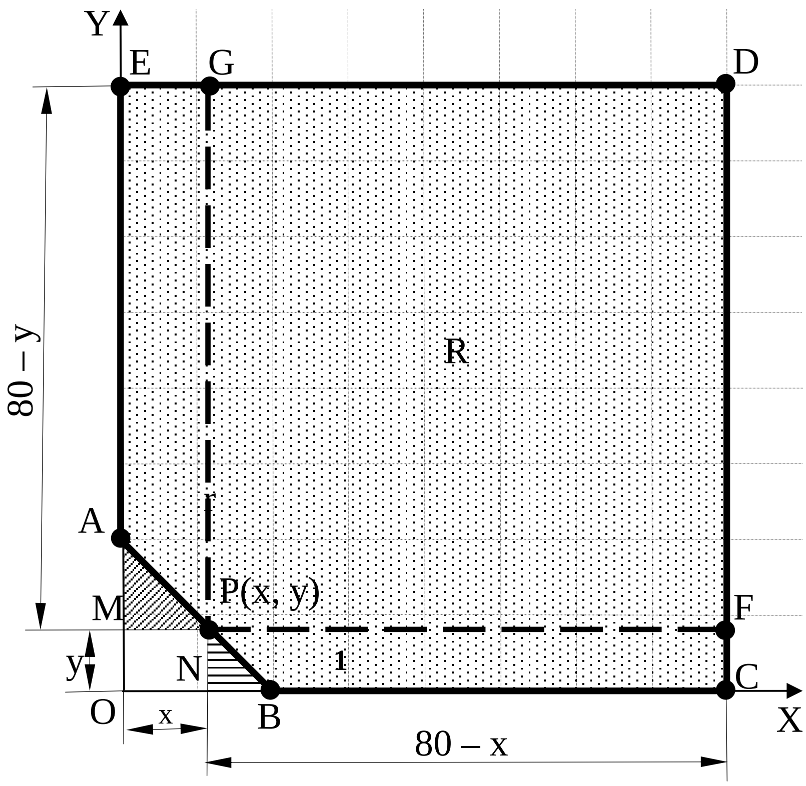
a) El área del rectángulo R en función de x, cuando $0 \leq x \leq 20$.

b) El valor de x para el que el área del rectángulo R es máxima.

c) El valor del área máxima del rectángulo R.

----

a)



Los triángulos AMP y PNB son semejantes por lados paralelos; en ellos puede establecerse la siguiente proporción:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{PN}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{NB}} \;;;\; \frac{20-y}{y} = \frac{x}{20-x} \;;;\; 400 - 20x - 20y + xy = xy \Rightarrow 20 - x - y = 0 \;;;\; \underline{y = 20 - x}.$$

$$R = (80 - x)(80 - y) = (80 - x)[80 - (20 - x)] = (80 - x)(60 + x) = 4.800 + 80x - 60x - x^2.$$

$$\underline{\underline{R(x) = -x^2 + 20x + 4.800}}$$

b)

El área será máxima cuando su primera derivada se anule.

$R'(x) = -2x + 20 = -2(x - 10) = 0 \Rightarrow \underline{x = 10}$. $\qquad R''(x) = -2 < 0 \Rightarrow \underline{Máximo}$.

El área R es máxima para x = 10 cm.

c)

$R(10) = -10^2 + 20 \cdot 10 + 4.800 = -100 + 200 + 4.800 = \underline{4.900}$.

El área máxima es de 4.900 cm^2.

****