

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE VALENCIA****JUNIO – 2012**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá sólo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.

Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica para la realización del examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Se da el sistema de ecuaciones $S: \begin{cases} 2x + a^2z = 5 \\ x + (1-a)y + z = 1, \text{ donde } \alpha \text{ es un parámetro real.} \\ x + 2y + a^2z = 1 \end{cases}$

Obtener razonadamente:

- a) La solución del sistema S cuando $\alpha = 0$.
- b) Todas las soluciones del sistema S cuando $\alpha = -1$.
- c) El valor de α para que el sistema S es incompatible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a^2 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 2 & a^2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a^2 & 5 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & a^2 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 2 & a^2 \end{vmatrix} = 2a^2(1-a) + 2a^2 - a^2(1-a) - 4 = a^2(1-a) + 2a^2 - 4 = a^2 - a^3 + 2a^2 - 4 =$$

$= -a^3 + 3a^2 - 4 = 0$;; $a^3 - 3a^2 + 4 = 0$. Resolviendo por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \\ 2 & & 2 & -4 & \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0} & \\ 2 & & 2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Las raíces diferentes son $\alpha = -1$ y $\alpha = 2$.

a)

Para $\alpha = 0$ el sistema resulta $S: \begin{cases} 2x = 5 \\ x + y + z = 1, \\ x + 2y = 1 \end{cases}$, que es compatible determinado y cuya solución es la siguiente:

$$\underline{\underline{x = \frac{5}{2}}}; y = \frac{1-x}{2} = \frac{1-\frac{5}{2}}{2} = \frac{-\frac{3}{2}}{2} = \underline{\underline{-\frac{3}{4}}} = y; z = 1 - x - y = 1 - \frac{5}{2} + \frac{3}{4} = \frac{4-10+3}{4} = \underline{\underline{-\frac{3}{4}}} = z.$$

b)

Para $\alpha = -1$ es $M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 2 por tener las dos últimas filas iguales.

Para $a = -1 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$

El sistema resulta $S: \begin{cases} 2x + z = 5 \\ x + 2y + z = 1, \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$, equivalente a $S: \begin{cases} 2x + z = 5 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$. Haciendo

$$\underline{y = \lambda}: \begin{cases} 2x + z = 5 \\ x + z = 1 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + z = 5 \\ -x - z = -1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{x = 4 + 2\lambda}; z = 5 - 2x = 5 - 8 - 4\lambda = \underline{\underline{-3 - 4\lambda}} = z.$$

$$\underline{\underline{\text{Solución: } \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 - 4\lambda \end{cases}, \forall \lambda \in \mathbb{R}}}$$

c)

Por el desarrollo del ejercicio en los apartados anteriores, necesariamente el sistema será incompatible para $\alpha = 2$, cosa que comprobamos a continuación.

Para $\alpha = 2$ el es $M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango vamos a determinar:

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 10 + 5 - 4 = 9 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}.$$

Para $\alpha = 2 \Rightarrow \text{Rango } M = 2$;; $\text{Rango } M' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible}$

El sistema es incompatible para $\alpha = 2$, como esperábamos.

2º) Se dan las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x=1+2a \\ y=a \\ z=2-a \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x=-1 \\ y=1+\beta \\ z=-1-2\beta \end{cases}$, siendo α y β parámetros reales.

Obtener razonadamente:

- a) Las coordenadas del punto P de corte de r_1 y r_2 .
- b) La ecuación del plano π que contiene esas dos rectas.
- c) La distancia del punto A(0, 0, 1) a la recta r_2 .

a)

Para hallar el punto P de corte de r_1 y r_2 basta con igualar, respectivamente, los valores de sus variables:

$$\begin{cases} 1+2\alpha = -1 \\ a = 1+\beta \\ 2-a = -1-2\beta \end{cases} \Rightarrow \underline{\alpha = -1} ; ; \underline{\beta = -2} \Rightarrow \underline{P(-1, -1, 3)}.$$

b)

Los vectores directores de las rectas son $\vec{v}_1 = (2, 1, -1)$ y $\vec{v}_2 = (0, 1, -2)$, respectivamente.

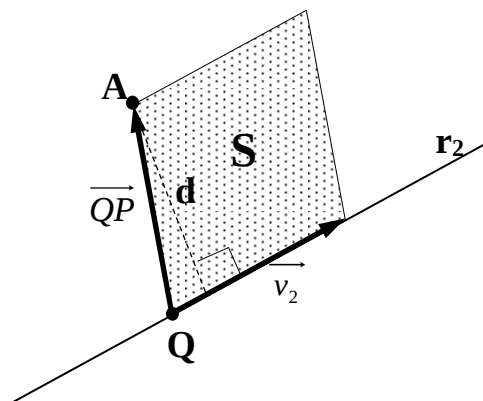
La ecuación general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi(P; \vec{v}_1, \vec{v}_2) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 ; ; -2(x+1)+2(z-3)+(x+1)+4(y+1)=0 ; ;$$

$$-(x+1)+4(y+1)+2(z-3)=0 ; ; -x-1+4y+4+2z-6=0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv x-4y-2z+3=0}.$$

c)

La distancia d del punto A(0, 0, 1) a la recta r_2 puede determinarse teniendo en cuenta que Q(-1, 1, -1) es un punto de r_2 y el vector director de r_2 es $\vec{v}_2 = (0, 1, -2)$.



Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un gráfico aproximado de la situación, que es el que aparece en la figura.

Teniendo en cuenta que $S = d \cdot |\vec{v}_2|$ y que también puede ser $S = |\vec{v}_2 \wedge \vec{QA}|$, se deduce que la

distancia es: $d = \frac{\left| \overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{QA} \right|}{\left| \overrightarrow{v_2} \right|}.$

El vector $\overrightarrow{QA}$ es: $\overrightarrow{QA} = A - Q = (0, 0, 1) - (-1, 1, -1) = (1, -1, 2).$

Aplicando la fórmula al caso que nos ocupa:

$$d(A, r_2) = \frac{\left| \overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{QA} \right|}{\left| \overrightarrow{v_2} \right|} = \frac{\left\| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right\|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|2i - 2j - k - 2i|}{\sqrt{0+1+4}} = \frac{|-2j - k|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}}{\sqrt{5}} = 1.$$

$$\underline{\underline{d(A, r_2) = 1 \text{ unidad}}}$$

3º) Con el símbolo Lx se representa el logaritmo de un número positivo x cuando la base del logaritmo es el número e . Sea f la función que para un número positivo x está definida por la igualdad $f(x) = 4xLx$. Obtener razonadamente:

- a) El valor de x donde la función f alcanza el mínimo relativo.
- b) La ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4xLx$ en el punto $A(1, 0)$.
- c) El área limitada entre las rectas $y = 0$, $x = e$ y $x = e^2$ y la curva $y = 4xLx$.

a)

Una función f alcanza el mínimo relativo en un punto cuando se anula su derivada y , para los valores que la anulan, resulta positiva su segunda derivada.

$$f'(x) = 4 \cdot Lx + 4x \cdot \frac{1}{x} = 4Lx + 4 = 4(Lx + 1) = 0 \Rightarrow Lx + 1 = 0 \;; \; Lx = -1 \Rightarrow \underline{x = e^{-1}}.$$

$$f''(x) = 4 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{x} \Rightarrow f''(e^{-1}) = \frac{4}{e^{-1}} = 4e > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo relativo para } x = e^{-1}}.$$

$$f(e^{-1}) = 4 \cdot e^{-1} \cdot L e^{-1} = \frac{4}{e} \cdot (-1) = -\frac{4}{e} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo relativo: } P\left(\frac{1}{e}, -\frac{4}{e}\right)}}.$$

b)

La pendiente de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto:

$$m = f'(1) = 4 \cdot (L1 + 1) = 4 \cdot (1 + 0) = \underline{4 = m}.$$

La fórmula de la ecuación de una recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y - y_0 = m \cdot (Lx + 1)$.

Aplicando la fórmula al punto $A(1, 0)$ y $m = 4$:

$$y - 0 = 4 \cdot (x - 1) = 4x - 4 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Tangente: } y = 4x - 4}}.$$

c)

Para valores de x tales que $e \leq x \leq e^2$, todas las ordenadas de la curva $y = 4xLx$ son positivas, por lo cual el área limitada entre las rectas $y = 0$, $x = e$ y $x = e^2$ y la curva $y = 4xLx$ es la siguiente:

$$S = 4 \int_e^{e^2} xLx \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Lx = u \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ x \cdot dx = dv \rightarrow \frac{x^2}{2} = v \end{array} \right\} \Rightarrow S = 4 \cdot \left[Lx \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \right]_e^{e^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \cdot \left[\frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \int x \cdot dx \right]_e^{e^2} = 4 \cdot \left[\frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_e^{e^2} = 4 \cdot \left[\frac{x^2}{4} (2Lx - 1) \right]_e^{e^2} = \left[x^2 (2Lx - 1) \right]_e^{e^2} = \\
&= \left[(e^2)^2 (2Le^2 - 1) \right] - \left[e^2 (2Le - 1) \right] = e^4 (4Le - 1) - e^2 (2 - 1) = e^4 (4 - 1) - e^2 = 3e^4 - e^2 = \underline{\underline{e^2 (3e^2 - 1) u^2 = S}}.
\end{aligned}$$

OPCIÓN B

1º) Obtener razonadamente:

a) Todas las soluciones $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de la ecuación $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) El determinante de una matriz cuadrada B de dos filas, que tiene matriz inversa y que verifica la ecuación $B^2 = B$.

c) El determinante de una matriz cuadrada A que tiene cuatro filas y verifica la ecuación:

$$A^2 - 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ sabiendo que el determinante de A es positivo.}$$

a)

El rango de la matriz de coeficientes $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 2 + 3 = 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M = 2}.$$

La matriz de coeficientes es $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y su rango es el siguiente:

$$\text{Rango } M' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 - 1 + 3 = 3 - 3 = 0 \\ \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 1 + 6 - 3 - 3 + 2 = 9 - 9 = 0 \\ \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 6 + 3 + 2 = 6 - 6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2}.$$

Rango $M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$

El sistema resulta $S: \begin{cases} x + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 3 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$. Despreciando la segunda ecuación y haciendo

$$\underline{z = \lambda} \Rightarrow \underline{x = 1 - 2\lambda} \;; \; y = x + z + 1 = 1 - 2\lambda + \lambda + 1 = \underline{2 - \lambda = y}.$$

$$\underline{\underline{\text{Solución: } \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2 - \lambda, \; \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

b)

Teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices:

$$B^2 = B \;; \; B \cdot B = B \Rightarrow |B \cdot B| = |B| \;; \; |B| \cdot |B| = |B| \Rightarrow \underline{\underline{|B| = 1}}.$$

c)

$$A^2 - 9 \cdot I = O \;; \; A^2 = 9I \;; \; A \cdot A = 9I \;; \; |A \cdot A| = |9I|.$$

$$|A| \cdot |A| = 9^4 \;; \; (|A|)^2 = 9^4 \Rightarrow \underline{\underline{|A| = 9^2 = 81}}.$$

2º) Se da la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+5y-z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x+y+nz=p$, donde n y p son dos parámetros reales. Obtener razonadamente:

- a) Todos los valores de n para que la intersección de la recta r y el plano π es un punto.
- b) El valor de n y el valor de p para los que la recta r está contenida en el plano π .
- c) El valor de n y todos los valores de p para los que la recta r no corta al plano π .

a)

Para que la recta r y el plano π se corten en un punto es condición necesaria que el vector director de la recta no sea perpendicular al vector normal del plano.

Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\vec{n}_1 = (1, -2, -2)$ y $\vec{n}_2 = (1, 5, -1)$.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2i - 2j + 5k + 2k + 10i + j = 12i - j + 7k \Rightarrow \vec{v}_r = (12, -1, 7).$$

El vector normal del plano $\pi \equiv 2x + y + nz = p$ es $\vec{n} = (2, 1, n)$.

Los vectores $\vec{v}_r = (12, -1, 7)$ y $\vec{n} = (2, 1, n)$ son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (12, -1, 7) \cdot (2, 1, n) = 24 - 1 + 7n = 23 + 7n = 0 \;; \; n = -\frac{23}{7}.$$

$$\underline{\underline{\text{La recta } r \text{ y el plano } \pi \text{ son secantes } \forall n, p \in \mathbb{R}, n \neq -\frac{23}{7}}}$$

b)

Existen diversas formas de hacer este apartado; una de ellas es la siguiente: la recta r está contenida en el plano π cuando todos los puntos de r están contenidos en π , para lo cual es suficiente con que lo estén dos de ellos.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+5y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \;; \; \begin{cases} x-2y=1+2\lambda \\ x+5y=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+2y=-1-2\lambda \\ x+5y=\lambda \end{cases} \Rightarrow 7y=-1-\lambda \;;$$

$$\underline{y = -\frac{1}{7} - \frac{1}{7}\lambda} \;; \; x = \lambda - 5y = \lambda + \frac{5}{7} + \frac{5}{7}\lambda = \underline{\frac{5}{7} + \frac{12}{7}\lambda = x} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \frac{5}{7} + \frac{12}{7}\lambda \\ y = -\frac{1}{7} - \frac{1}{7}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Dos puntos de r son, por ejemplo, $A(-1, 0, -1)$ y $B(11, -1, 6)$ para $\lambda = -1$ y $\lambda = 6$, respectivamente.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + y + nz = p \\ A(-1, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow -2 + 0 - n = p \;; \; n + p = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + y + nz = p \\ B(11, -1, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow 22 - 1 + 6n = p \;; \; 6n - p = -21$$

$$\Rightarrow 7n = -23 \Rightarrow \begin{cases} n = -\frac{23}{7} \\ p = -2 - n = \underline{\frac{9}{7}} = p \end{cases}.$$

$$\underline{\underline{La recta r est\u00e1 contenida en el plano \pi para n = -\frac{23}{7} y p = \frac{9}{7}}}$$

c)

La recta r no corta al plano π cuando son paralelos y la recta no est\u00e1 contenida en el plano. De los apartados anteriores se deduce que:

$$\underline{\underline{La recta r no corta al plano \pi para n = -\frac{23}{7} y p \neq \frac{9}{7}}}$$

3º) Para diseñar un escudo se dibuja un triángulo T de vértices $A(0, 12)$, $B(-x, x^2)$ y $C(x, x^2)$, siendo $x^2 < 12$. Obtener razonadamente:

a) El área del triángulo T en función de la abscisa x del vértice C.

b) Las coordenadas de los vértices B y C para que el área del triángulo T sea máxima.

Para completar el escudo se añade al triángulo T de área máxima la superficie S limitada entre la recta $y = 4$ y el arco de parábola $y = x^2$, cuando $-2 \leq x \leq 2$.

Obtener razonadamente:

c) El área de la superficie S.

d) El área total del escudo.

a)

$$S = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{PA}}{2} = \frac{[x - (-x)] \cdot (12 - x^2)}{2} = \frac{2x \cdot (12 - x^2)}{2} = 12x - x^3.$$

$$\underline{\underline{S = 12x - x^3}}$$

b)

El área del triángulo será máxima cuando se anule su derivada y sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$S' = 12 - 3x^2 = 3(4 - x^2) = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = -2} \quad ; \quad \underline{x_2 = 2}.$$

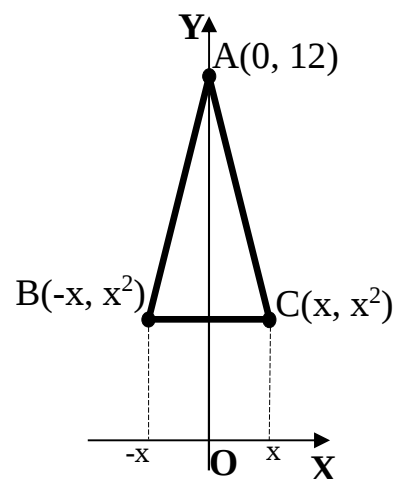
$$S'' = -6x \Rightarrow \begin{cases} S''(-2) = -6 \cdot (-2) = 12 > 0 \rightarrow \underline{\text{Mínimo relativo para } x = -2} \\ S''(2) = -6 \cdot 2 = -12 < 0 \rightarrow \underline{\text{Máximo relativo para } x = 2} \end{cases}.$$

Las coordenadas pedidas son: $\underline{B(-2, 4)}$ y $\underline{C(2, 4)}$.

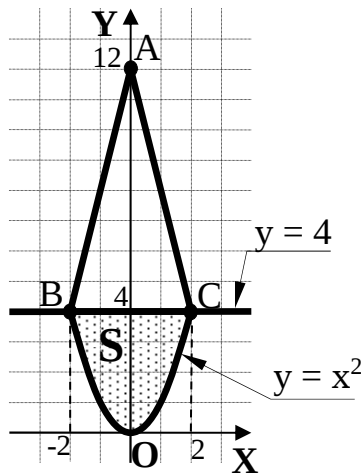
c)

Los puntos de corte de la parábola $y = x^2$ con la recta $y = 4$ son las soluciones que resultan de la igualación de sus expresiones:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow \underline{B(-2, 4)} \\ x_2 = 2 \rightarrow \underline{C(2, 4)} \end{cases}.$$



Teniendo en cuenta que la gráfica de $y = x^2$ pasa por el origen, la representación gráfica de la situación es la que se encuentra en la figura adjunta.



El área de la superficie S se deduce de la observación de la figura, y es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^2 4 \cdot dx - \int_{-2}^2 x^2 \cdot dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) \cdot dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 =$$

$$= \left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left[4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right] = 8 - \frac{8}{3} - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} =$$

$$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{48 - 16}{3} = \underline{\underline{\frac{32}{3} u^2 = S.}}$$

d)

Teniendo en cuenta que el área del triángulo es $S_{ABC} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16 u^2$, el área total del escudo es la siguiente:

$$S_{TOTAL} = 16 + \frac{32}{3} = \frac{48 + 32}{3} = \underline{\underline{\frac{80}{3} u^2 = S_{TOTAL}}}$$
