

Opción A

Problema A.1- Sea el sistema de ecuaciones $S : \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ 3x + 10y - z = 0 \\ x + 14y + \alpha z = 0 \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**:

- a) La solución del sistema **S** cuando $\alpha = 0$. **(4 puntos)**
 b) El valor de α para el que el sistema **S** tiene infinitas soluciones. **(4 puntos)**
 c) Todas las soluciones del sistema **S** cuando se da a α el valor obtenido en el apartado b) **(2 puntos)**

En general y para los tres apartados una ecuación homogénea solo puede ser compatible determinado o compatible indeterminado y para diferenciar ambos casos hay que recurrir al determinante que se forma con los coeficientes siendo no nulo para los determinados (que todos tienen la misma solución, la denominada trivial) y nulo para los de compatibilidad indeterminada.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 1 & 14 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 126 + 30 + 14 = -80 \neq 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \Rightarrow$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

b)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 1 & 14 & \alpha \end{vmatrix} = 10\alpha + 2 - 126 + 30 + 14 + 6\alpha = 16\alpha - 80 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 16\alpha - 80 = 0 \Rightarrow \alpha = 5$$

Cuando $\alpha = 5 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

c)

Si $\alpha = 5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & 10 & -1 & 0 \\ 1 & 14 & 5 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 16y + 8z = 0 \Rightarrow 2y + z = 0 \Rightarrow z = -2y \Rightarrow$$

$$x - 2y - 3 \cdot (-2y) = 0 \Rightarrow x - 2y + 6y = 0 \Rightarrow x = -4y \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (-4\lambda, \lambda, -2\lambda)$$

Problema A.2.- En el espacio se tiene la recta $r : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi : x + mz = 0$, donde m es

un parámetro real. Obtener **razonadamente**:

a) Un vector director de la recta r (**2 puntos**)

b) El valor de m para el que la recta r y el plano π son perpendiculares (**2 puntos**)

c) El valor de m para el que la recta r y el plano π son paralelos (**3 puntos**)

d) La distancia entre r y π cuando se da a m el valor obtenido en el apartado c) (**3 puntos**)

a) El vector director es el determinado por el producto vectorial de los vectores de los planos que definen a la recta r

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = (1, 1, -1) \\ \vec{v}_2 = (1, -1, -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} - \vec{k} - \vec{i} + \vec{j} = -2\vec{i} - 2\vec{k} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_r = (-2, 0, -2) \equiv (1, 0, 1)$$

b) Como los vectores directores de la recta y el plano, al ser perpendiculares entre si, son paralelos son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 0, 1) \\ \vec{v}_\pi = (1, 0, m) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{0}{0} = \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{1}{m} \Rightarrow m = 1$$

c) Como los vectores directores de la recta y el plano, al ser paralelos entre si, son perpendiculares, su producto escalar es nulo

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 0, 1) \\ \vec{v}_\pi = (1, 0, m) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_\pi \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = 0 \Rightarrow (1, 0, 1) \cdot (1, 0, m) = 0 \Rightarrow 1 + m = 0 \Rightarrow m = -1$$

c) Es la distancia que hay, al ser paralelos, entre uno cualquiera de los puntos R de la recta r y el plano π

$$2x - 2z = 1 \Rightarrow x - z = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} + z \Rightarrow \frac{1}{2} + z - y - z = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow R\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow$$

$$d(r, \pi) = d(R, \pi) = \frac{\left|\frac{1}{2} - 0\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} u$$

Problema A.3.- Se definen las funciones f y g por $f(x) = -x^2 + 2x$ y $g(x) = x^2$.

Obtener **razonadamente**:

- a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una de esas dos funciones (2 puntos)
 b) El máximo relativo de la función $f(x) = -x^2 + 2x$ y el mínimo relativo de $g(x) = x^2$ (2 puntos)
 c) Los puntos de intersección de las curvas $y = -x^2 + 2x$ e $y = x^2$ (2 puntos)
 d) El área encerrada entre las curvas $y = -x^2 + 2x$ e $y = x^2$, donde en ambas curvas la x varía entre 0 y 1 (4 puntos)

a)

$$f'(x) = -2x + 2 \Rightarrow \text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow -2x + 2 > 0 \Rightarrow -2x > -2 \Rightarrow 2x < 2 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{Crecimiento} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x < 1 \\ \text{Decrecimiento} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x > 1 \end{cases}$$

$$g'(x) = 2x \Rightarrow \text{Crecimiento} \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Crecimiento} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x > 0 \\ \text{Decrecimiento} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x < 0 \end{cases}$$

b)

$$\text{Máximo relativo en } x = 1 \Rightarrow f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1 \Rightarrow \text{De crecimiento pasa a decrecimiento}$$

$$\text{Mínimo relativo en } x = 0 \Rightarrow g(0) = 0^2 = 0 \Rightarrow \text{De decrecimiento pasa a crecimiento}$$

c)

$$-x^2 + 2x = x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow 2x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

d)

$$\frac{1}{2} \in [0, 1] \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{Positivo} \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{Positivo} \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) > g\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$A = \int_0^1 (-x^2 + 2x) dx - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 (-2x^2 + 2x) dx = -2 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^1 = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3} u^2$$

Opción B

Problema B.1- Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B , donde B es una matriz de dos filas y dos columnas que no tiene ningún elemento nulo y que verifica la relación

$B^2 = -7B + U$. Obtener **razonadamente**:

- a) Los números reales a y b tales que $A^2 = aA + bU$ (4 puntos)
 b) Los números reales p y q tales que $B^{-1} = pB + qU$ (2 puntos), justificando que la matriz B tiene inversa (2 puntos),
 c) Obtener los valores x e y para los que se verifica $B^3 = xB + yU$ (2 puntos)

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a \\ a & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -a \\ a & a+b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \Rightarrow b=-a \\ -a=-2 \Rightarrow a=2 \\ a=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$$

b)

$$B^2 + 7B = U \Rightarrow B(B+7) = U \Rightarrow B(B+7U) = U \Rightarrow B^{-1}B \cdot (B+7U) = B^{-1}U \Rightarrow B^{-1} = U \cdot (B+7U) =$$

$$B^{-1} = B + 7U \Rightarrow$$

$$B^{-1} = B + 7U = pB + qU \Rightarrow \begin{cases} p=1 \\ q=7 \end{cases} \Rightarrow$$

c)

$$B^3 = B^2 \cdot B = (-7B + U) \cdot B = -7B^2 + UB = -7B^2 + B = -7 \cdot (-7B + U) + B = 49B - 7U + B = 48B - 7U$$

$$B^3 = 48B - 7U = xB + yU \Rightarrow \begin{cases} x=48 \\ y=-7 \end{cases}$$

Problema B.2.- En el espacio se dan los planos π , σ y τ de ecuaciones $\pi : 2x - y + z = 3$; $\sigma : x - y + z = 2$; $\tau : 3x - y - az = b$ siendo a y b parámetros reales, y la recta r intersección de los planos π y σ . Obtener **razonadamente**:

- a) Un punto, el vector director y las ecuaciones de la recta r . (3 puntos)
 b) La ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $(2, 1, 3)$ (4 puntos)
 c) Los valores de a y b para que el plano τ contenga a la recta r intersección de los planos π y σ (3 puntos)

a)

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ -x + y - z = -2 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 1 - y + z = 2 \Rightarrow z = 1 + y \Rightarrow \begin{cases} \text{Punto } R(1, 0, 1) \\ v_r = (0, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

b) El plano π queda determinado por el vector director de la recta r , por el vector formado por el punto dado P y un punto cualquiera R de la recta r (tomaremos el indicado en la ecuación) y por el formado por el punto P y el punto G genérico del plano.

Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector $\overrightarrow{PG}$ es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{PR} = (1, 0, 1) - (2, 1, 3) = (-1, -1, -2) \equiv (1, 1, 2) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (2, 1, 3) = (x-2, y-1, z-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2(x-2) + (y-1) - (z-3) - (x-2) = 0 \Rightarrow (x-2) + (y-1) - (z-3) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y - z = 0$$

c) El sistema que forman los tres planos, al determinar una recta común, tiene infinitas soluciones siendo compatible indeterminado

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y - az = b \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -a & b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -2 & -4 \\ -6 & 2 & 2a & -2b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2a+3 & -2b+9 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2a+3-1 & -2b+9-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) \Rightarrow \begin{cases} 2a+2=0 \Rightarrow 2a=-2 \Rightarrow a=-1 \\ -2b+8=0 \Rightarrow 2b=8 \Rightarrow b=4 \end{cases}$$

Problema B.3.- Se desea construir un depósito cilíndrico de **100 m³** de capacidad, abierto por la parte superior. Su base es un círculo en posición horizontal de radio x y la pared vertical del depósito es una superficie cilíndrica perpendicular a su base.

El precio del material de la base es de **4 euros/m²**

El precio del material de la pared vertical es de **2 euros/m²**

Obtener **razonadamente**:

a) El área de la base en función de su radio x . **(1 punto)**

b) El área de la pared vertical en función de x **(2 puntos)**

c) La función $f(x)$ que da el coste del depósito **(2 puntos)**

d) El valor x del radio de la base para que el coste del depósito es mínimo y el valor de dicho coste mínimo **(5 puntos)**

a)

$$\text{Área de la base} = \pi x^2$$

b)

$$\text{Siendo } h \text{ la altura del cilindro} \Rightarrow \text{Área de la pared vertical} = 2\pi xh$$

c)

$$f(x) = 4\pi x^2 + 2 \cdot 2\pi xh = 4\pi x(x + h)$$

d)

$$\begin{cases} 100 = \pi x^2 h \Rightarrow h = \frac{100}{\pi x^2} \Rightarrow f(x) = 4\pi x \left(x + \frac{100}{\pi x^2} \right) = 4\pi x \frac{\pi x^3 + 100}{\pi x^2} = 4 \frac{\pi x^3 + 100}{x} \Rightarrow \\ f(x) = 4\pi x(x + h) \end{cases}$$

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{3\pi x^2 x - (\pi x^3 + 100)}{x^2} = 4 \cdot \frac{3\pi x^3 - \pi x^3 - 100}{x^2} = 4 \cdot \frac{2\pi x^3 - 100}{x^2} = 8 \cdot \frac{\pi x^3 - 50}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$8 \cdot \frac{\pi x^3 - 50}{x^2} = 0 \Rightarrow \pi x^3 = 50 \Rightarrow x^3 = \frac{50}{\pi} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} = \frac{\sqrt[3]{50 \cdot \pi^2}}{\pi} \Rightarrow f''(x) = 8 \cdot \frac{3\pi x^2 x^2 - 2x(\pi x^3 - 50)}{x^4}$$

$$f''(x) = 8 \cdot \frac{3\pi x^3 - 2(\pi x^3 - 50)}{x^3} = 8 \cdot \frac{3\pi x^3 - 2\pi x^3 + 100}{x^3} = 8 \cdot \frac{\pi x^3 + 100}{x^3} \Rightarrow$$

$$f''\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right) = 8 \cdot \frac{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right)^3 + 100}{\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right)^3} = 8 \cdot \frac{\pi \cdot \frac{50}{\pi} + 100}{\frac{50}{\pi}} = 8 \cdot \frac{50 + 100}{\frac{50}{\pi}} = 8 \cdot \frac{150\pi}{50} = 24\pi > 0 \Rightarrow \text{Mínimo}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt[3]{50 \cdot \pi^2}}{\pi} \text{ m} \\ h = \frac{100}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right)^2} = \frac{100}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{2500}{\pi^2}}\right)} = \frac{100\sqrt[3]{\pi^2}}{\pi\sqrt[3]{50^2}} = \frac{100\sqrt[3]{50\pi^2}}{50\pi} = \frac{2\sqrt[3]{50\pi^2}}{\pi} \text{ m} \Rightarrow \end{cases}$$

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right) = 4 \frac{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right)^3 + 100}{\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}} = 4 \frac{\pi \cdot \frac{50}{\pi} + 100}{\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}} = 4 \frac{150 \cdot \sqrt[3]{\pi}}{\sqrt[3]{50}} = 4 \frac{150 \cdot \sqrt[3]{2500\pi}}{50} = 12 \cdot \sqrt[3]{2500\pi} \text{ euros}$$