

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE VALENCIA****SEPTIEMBRE – 2011 (GENERAL)**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá sólo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.

Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica para la realización del examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y M, donde M es una matriz de dos filas y dos columnas que verifica que $M^2 = M$. Obtener razonadamente:

a) Todos los valores de k para los que la matriz $B = A - k \cdot I$ tiene inversa.

b) La matriz inversa de B cuando $k = 3$.

c) Las constantes reales α y β para las que se verifica que $\alpha \cdot A^2 + \beta \cdot A = -2 \cdot I$.

d) Comprobar razonadamente que la matriz $P = I - M$ cumple las relaciones $P^2 = P$ y $M \cdot P = P \cdot M$.

a)

$$B = A - k \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -2 \\ 1 & 3-k \end{pmatrix} = B.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -k & -2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = -k(3-k) + 2 = 0 \quad ; \quad -3k + k^2 + 2 = 0 \quad ; \quad k^2 - 3k + 2 = 0 \quad ; \quad k = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} =$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \underline{k_1 = 1} \quad ; \quad \underline{k_2 = 2}.$$

La matriz $B = A - k \cdot I$ tiene inversa $\forall k \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$

b)

Para $k = 3$ es $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Para hallar B^{-1} empleamos el método de Gauss-Jordan.

$$(B/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 + 3F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow -\frac{1}{2}F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\underline{B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}}.$$

c)

$$\alpha \cdot A^2 + \beta \cdot A = -2 \cdot I \Rightarrow \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^2 + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} ;;$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2\beta \\ \beta & 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} ;; \alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2\beta \\ \beta & 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} ;;$$

$$\begin{pmatrix} -2\alpha & -6\alpha \\ 3\alpha & 7\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2\beta \\ \beta & 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} ;; \begin{pmatrix} -2\alpha & -6\alpha - 2\beta \\ 3\alpha + \beta & 7\alpha + 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -3 \end{cases}}}.$$

Para que se verifique $\alpha \cdot A^2 + \beta \cdot A = -2 \cdot I$ tiene que ser $\alpha = 1$ y $\beta = -3$

d)

Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; por definición tiene que ser $M^2 = M \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ;;$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ;; \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = a & (*) \\ ab + bd = b & \rightarrow b(a + d) = b \\ ac + cd = c & \rightarrow c(a + d) = c \\ bc + d^2 = d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + d = 1 ;; \underline{d = 1 - a} \Rightarrow \underline{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 - a \end{pmatrix}}.$$

$$P = I - M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 - a \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 - a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = P}}.$$

$$P^2 = P \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 - a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 - a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} ;; \begin{pmatrix} 1 - a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} ;;$$

$$\begin{pmatrix} (1-a)^2 + bc & -b(1-a) - ab \\ -c(1-a) - ac & bc + a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} ;; \begin{pmatrix} 1-2a+a^2+bc & -b+ab-ab \\ -c+ac-ac & bc+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} ;;$$

$$\begin{pmatrix} 1-2a+a^2+bc & -b \\ -c & bc+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $a^2 + bc = a$ (*), la expresión anterior queda:

$$\begin{pmatrix} 1-2a+a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

La igualdad anterior prueba que $P^2 = P$.

Tenemos que probar que $M \cdot P = P \cdot M$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix} ;;$$

$$\begin{pmatrix} a-a^2-bc & -ab+ab \\ c-ac-c+ac & -bc+a-a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a^2-bc & b-ab-b+ab \\ -ac+ac & -bc+a-a^2 \end{pmatrix} ;;$$

$$\underline{\begin{pmatrix} a-a^2-bc & 0 \\ 0 & -bc+a-a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a^2-bc & 0 \\ 0 & -bc+a-a^2 \end{pmatrix}}.$$

La igualdad anterior prueba que $M \cdot P = P \cdot M$

También se probaba de la siguiente forma:

$$M \cdot P = P \cdot M ;; M \cdot (I - M) = (I - M) \cdot M ;; M \cdot I - M^2 = I \cdot M - M^2 ;; \underline{M - M^2 = M - M^2}$$

2º) En el espacio se dan las rectas $r \equiv \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+2y-1=0 \\ 3y-z+2+\alpha=0 \end{cases}$. Obtener razonadamente:

- a) El valor de α para el que las rectas r y s están contenidas en un plano.
- b) La ecuación del plano que contiene a las rectas r y s para el valor de α obtenido en el apartado anterior.
- c) La ecuación del plano perpendicular a la recta r que contenga al punto P(1, 2, 1).

a)

Para que las rectas r y s estén contenidas en un plano en los casos siguientes: que sean coincidentes, que sean paralelas o que sean secantes.

Es evidente que las rectas no son coincidentes, por lo cual el estudio se hace para el caso de paralelas o secantes.

La expresión de r por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases} ;; \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} 2x-6=y+1 \\ x-3=z-2 \end{cases} ;; \underline{r \equiv \begin{cases} 2x-y-7=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}}$$

Las rectas r y s determinan el sistema
$$\left. \begin{array}{l} 2x-y=7 \\ x-z=1 \\ x+2y=1 \\ 3y-z=-2-\alpha \end{array} \right\}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2-\alpha \end{pmatrix}.$$

En función de los rangos de las matrices M y M', la posición relativa de las dos rectas es la siguiente:

Rango M = Rango M' = 2 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas coincidentes.

Rango M = 2 ;; Rango M' = 3 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas paralelas.

Rango M = Rango M' = 3 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas se cortan en un punto.

Rango M = 3 ;; Rango M' = 4 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

$$\text{Rango } M \Rightarrow \{F_1, F_2, F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M = 3}.$$

$$\text{Rango } M' \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2-\alpha \end{vmatrix} \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - F_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & -3 & 0 & 3+\alpha \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2-\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & 3+\alpha \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 14 - (3+\alpha) + 21 + 1 - 4(3+\alpha) = 30 - 5(3+\alpha) = 30 - 15 - 5\alpha = 15 - 5\alpha =$$

$$= 5(3-\alpha) = 0 \Rightarrow \underline{\alpha = 3}.$$

Para $\alpha \neq 3 \rightarrow$ Rango M = 3 ;; Rango M' = 4 $\rightarrow$ Las rectas r y s se cruzan.

Para $\alpha = 3 \rightarrow$ Rango M = Rango M' = 3 $\rightarrow$ Las rectas r y s se cortan en un punto.

Las rectas r y s están contenidas en un plano para $\alpha = 3$.

b)

Para $\alpha = 3$ la recta s es $s \equiv \begin{cases} x+2y=1 \\ 3y-z=-5 \end{cases}$. Un punto de s es A(1, 0, 5).

Un punto y un vector director de r $\equiv \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$ son B(3, -1, 2) y $\overrightarrow{v_r} = (1, 2, 1)$.

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2, -1, -3)$.

La ecuación general del plano π que contiene a las rectas r y s es la siguiente:

$$\pi(A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_r}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 ;; -(x-1) - 3y + 4(z-5) + (z-5) + 6(x-1) - 2y = 0 ;;$$

$$5(x-1) - 5y + 5(z-5) = 0 ;; x-1 - y + z-5 = 0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x - y + z - 6 = 0}}$$

c)

La ecuación del haz de planos perpendiculares a la recta r tiene como vector normal al vector director de r , por lo que su expresión es de la forma $\beta \equiv x + 2y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz anterior, el plano μ que contiene al punto $P(1, 2, 1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \beta \equiv x + 2y + z + D = 0 \\ P(1, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 2 \cdot 2 + 1 + D = 0 \;; \; 6 + D = 0 \;; \; \underline{D = -6}.$$

El plano $\perp$ a r que contiene a $P(1, 2, 1)$ es $\mu \equiv x + 2y + z - 6 = 0$

3º) Dada la función f definida por $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$. Obtener razonadamente:

a) El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función $f(x)$.

c) Los valores de x donde la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ tiene los puntos de inflexión.

d) La gráfica de la curva $y = x^2 \cdot e^{-x}$, explicando con detalle la obtención de su asíntota horizontal.

a)

La función está definida para cualquier valor real de x : $\underline{\underline{D(f) \Rightarrow R}}$.

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales y oblicuas.

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más o menos infinito; son de la forma $y = k$.

$$y = k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = \underline{0}.$$

$$y = k = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-\infty)^2}{e^{-\infty}} = \underline{+\infty}.$$

El semieje positivo OX es asíntota horizontal de $f(x)$.

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$e^x \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow \underline{\underline{\text{No tiene asíntotas verticales.}}}$

Oblicuas: Las asíntotas horizontales y oblicuas son excluyentes.

La función $f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

b)

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función $f(x)$.

Una función es creciente o decreciente en su dominio cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x} = \frac{x(2-x)}{e^x} = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 0} \;; \; \underline{x_2 = 2}$$

Por ser $e^x \neq 0, \forall x \in R$, las raíces encontradas dividen el dominio de $f(x)$, que es R , en tres intervalos que son, alternativamente, crecientes y decrecientes, por lo cual, basta con estudiar uno de ellos, por ejemplo $(0, 2)$, (al que pertenece el valor sencillo $x = 1$):

$$f'(1) = \frac{2-1}{e^1} = \frac{1}{e} > 0.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son:

$$\underline{\text{Crecimiento: } x \in (0, 2)} \;; \; \underline{\text{Decrecimiento: } x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)}$$

c)

La función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ tiene puntos de inflexión para los valores que anulan la segunda derivada y hacen distinta de cero a la tercera derivada.

$$f''(x) = \frac{(2-2x) \cdot e^x - x(2-x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2-2x-2x+x^2}{e^x} = \frac{x^2-4x+2}{e^x}.$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-4x+2}{e^x} = 0 \;; \; x^2-4x+2 = 0 \;; \; x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 2 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \underline{x_1 = 2 - \sqrt{2}} \;; \; \underline{x_2 = 2 + \sqrt{2}}.$$

$$\underline{\text{La función } f(x) = x^2 \cdot e^{-x} \text{ tiene puntos de inflexión para } x = 2 - \sqrt{2} \text{ y para } x = 2 + \sqrt{2}}$$

d)

La explicación adecuada para el cálculo de la asíntota horizontal está detallada en el apartado a).

Aunque no se pide y con objeto de facilitar la representación gráfica, vamos a determinar los máximos y mínimos relativos de la función.

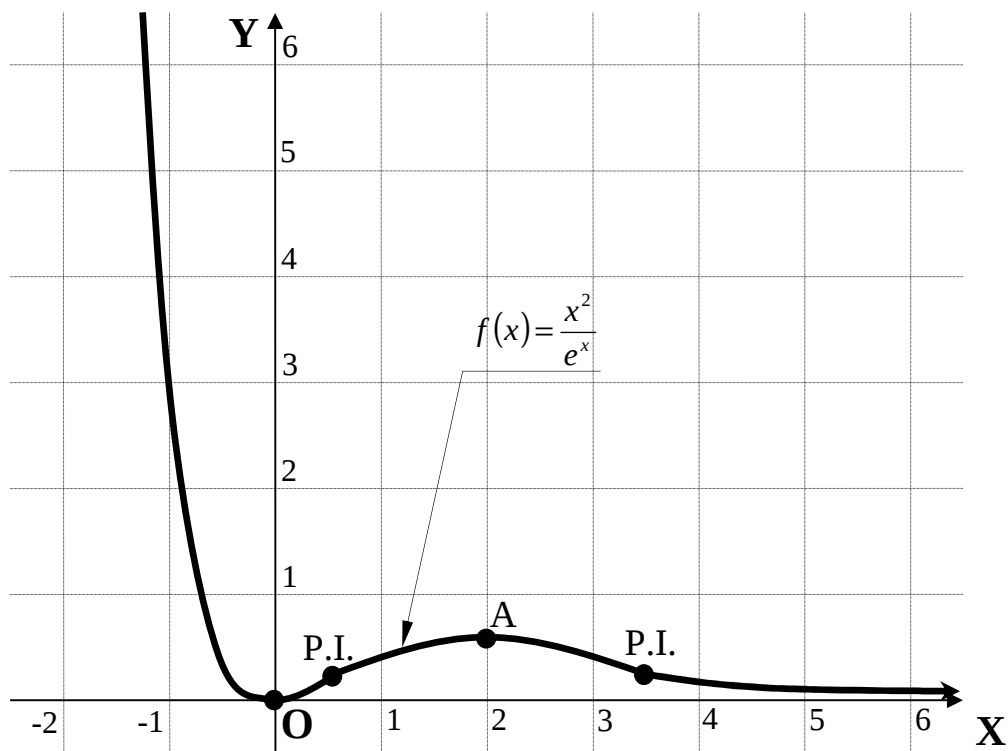
$$\text{Un máximo relativo existe para los valores de } x \text{ que cumplen que: } \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f''(x) < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Un mínimo relativo existe para los valores de } x \text{ que cumplen que: } \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f''(x) > 0 \end{cases}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 0} \;; \; \underline{x_2 = 2}.$$

$$f''(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{e^x} \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = \frac{2}{e^0} = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo relativo}} \Rightarrow O(0, 0) \\ f''(2) = \frac{4 - 8 + 2}{e^2} < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo relativo}} \Rightarrow A\left(2, \frac{4}{e^2}\right) \end{cases}.$$

Con los datos obtenidos puede dibujarse, aproximadamente, la gráfica de $f(x)$, que es la siguiente.



OPCIÓN B

1º) Se dan las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y T, y se sabe que T es una matriz cuadrada de 3

filas y tres columnas cuyo determinante vale $\sqrt{2}$. Calcular razonadamente los determinantes de las siguientes matrices, indicando explícitamente las propiedades utilizadas en su cálculo:

a) $\frac{1}{2}T$

b) M^4

c) $T \cdot M^3 \cdot T^{-1}$.

a)

El producto (o cociente) de una matriz por un número real distinto de cero es otra matriz cuyos elementos resultan de multiplicar (o dividir) todos y cada uno de los elementos de la matriz por el número real.

Teniendo en cuenta lo anterior y la propiedad de los determinantes que dice que si los elementos de una línea (fila o columna) se multiplican (o dividen) por un número real el valor del determinante queda multiplicado (o dividido) por dicho número, y que el rango de T es 3:

$$\left| \frac{1}{2}T \right| = \left(\frac{1}{2} \right)^3 \cdot |T| = \frac{1}{8} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{8} = \underline{\underline{\left| \frac{1}{2}T \right|}}.$$

a)

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 + 4 - 2 - 1 + 4 = 10 - 4 = 6 = \underline{\underline{|M|}}.$$

Teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices:

$$|M^4| = |M \cdot M \cdot M \cdot M| = |M| \cdot |M| \cdot |M| \cdot |M| = (|M|)^4 = 6^4 = \underline{\underline{1.296}} = |M^4|.$$

c)

Sabiendo que $|A^{-1}| = \left| \frac{1}{A} \right| = \frac{1}{|A|}$, y teniendo en cuenta los apartados anteriores:

$$|T \cdot M^3 \cdot T^{-1}| = \sqrt{2} \cdot 6^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6^3 = \underline{\underline{216}} = |T \cdot M^3 \cdot T^{-1}|.$$

2º) Se da la recta $r \equiv \begin{cases} x-4y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi_\alpha \equiv (2+2\alpha)x + y + \alpha z - 2 - 6\alpha = 0$, dependiente del parámetro α . Obtener razonadamente:

a) La ecuación del plano π_α que pasa por el punto $P(1, 1, 0)$.

b) La ecuación del plano π_α que es paralelo a la recta r .

c) La ecuación del plano π_α que es perpendicular a la recta r .

a)

La ecuación del plano π_α que pasa por el punto $P(1, 1, 0)$ es la que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \pi_\alpha \equiv (2+2\alpha)x + y + \alpha z - 2 - 6\alpha = 0 \\ P(1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow (2+2\alpha) \cdot 1 + 1 + \alpha \cdot 0 - 2 - 6\alpha = 0 ;;$$

$$2+2\alpha+1+0-2-6\alpha=0 ;; 1-4\alpha=0 ;; \underline{\alpha=\frac{1}{4}}.$$

$$\pi_\alpha \equiv \left(2+2 \cdot \frac{1}{4}\right)x + y + \frac{1}{4}z - 2 - 6 \cdot \frac{1}{4} = 0 ;; \pi_\alpha \equiv \left(2+\frac{1}{2}\right)x + y + \frac{1}{4}z - 2 - \frac{3}{2} = 0 ;;$$

$$\pi_\alpha \equiv \frac{5}{2}x + y + \frac{1}{4}z - \frac{7}{2} = 0 ;; \Rightarrow \underline{\underline{\pi_\alpha \equiv 10x + 4y + z - 14 = 0}}.$$

b)

Una recta y un plano son paralelos cuando el sistema que forman es incompatible, o sea, que el rango de la matriz de coeficientes es dos y el rango de la matriz ampliada es tres.

$$\text{El sistema que forman la recta y el plano es } \left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x-4y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \\ \pi_\alpha \equiv (2+2\alpha)x + y + \alpha z - 2 - 6\alpha = 0 \end{array} \right\}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2+2\alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2+2\alpha & 1 & \alpha & 2+6\alpha \end{pmatrix}.$$

$$\text{Rango } M = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2+2\alpha & 1 & \alpha \end{vmatrix} = 0 \;; \; \alpha + 4(2+2\alpha) + 1 = 0 \;; \; \alpha + 8 + 8\alpha + 1 = 0 \;;$$

$$9\alpha + 9 = 1 \;; \; \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \underline{\alpha = -1}.$$

Vamos a justificar que para $\alpha = -1$ es Rango $M' = 3$:

$$\text{Para } \alpha = -1 \text{ es } M' = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3, \text{ c.q.j.}}$$

Para $\alpha = -1$ es $\pi_\alpha \equiv (2-2)x + y - z - 2 + 6 = 0$. El plano pedido es el siguiente:

$$\underline{\underline{\pi_\alpha \equiv y - z + 4 = 0}}$$

c)

La recta $r \equiv \begin{cases} x - 4y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ tiene como vector director a cualquiera que sea linealmente dependiente al producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\vec{n}_1 = (1, -4, 0)$ y $\vec{n}_2 = (0, 1, -1)$.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4i + k + j = 4i + j + k = \underline{(4, 1, 1)} = \underline{\vec{v}_r}.$$

Para que el plano $\pi_\alpha \equiv (2+2\alpha)x + y + \alpha z - 2 - 6\alpha = 0$ sea perpendicular a la recta r , su vector normal tiene que ser linealmente dependiente del vector director de r ; el vector normal del plano es $\vec{n}_\pi = (2+2\alpha, 1, \alpha)$. Las componentes de los vectores tienen que ser proporcionales:

$$\frac{2+2\alpha}{4} = \frac{1}{1} = \frac{\alpha}{1} \Rightarrow \underline{\alpha = 1}.$$

$$\text{Para } \alpha = 1 \text{ es } \pi_\alpha \equiv (2+2)x + y + z - 2 - 6 = 0.$$

La ecuación del plano π_α que es perpendicular a la recta r es el siguiente:

$$\underline{\underline{\pi_\alpha \equiv 4x + y + z - 8 = 0}}$$

3º) Un coche recorre el arco de una parábola Γ de ecuación $2y = 36 - x^2$, variando la x de -6 a 6. Se representa por $f(x)$ a la distancia del punto $A(0, 9)$ al punto $P(x, y)$ del arco Γ donde está situado el coche. Se pide obtener razonadamente:

a) La expresión de $f(x)$.

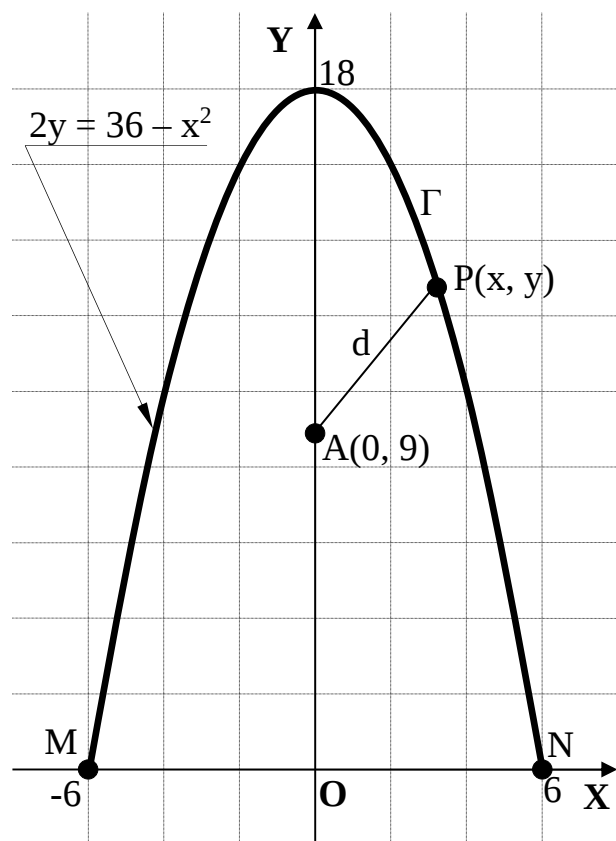
b) Los puntos del arco Γ donde la distancia a $f(x)$ tiene mínimos relativos.

c) Los valores máximo y mínimo de la distancia a $f(x)$.

d) El área de la superficie limitada por el arco de parábola Γ y el segmento rectilíneo que une los puntos $M(-6, 0)$ y $N(6, 0)$.

a)

La representación gráfica de la situación es la indicada en la figura.



La expresión del punto $P(x, y)$ es de la forma $P\left(x, \frac{36 - x^2}{2}\right)$.

La expresión de la distancia d del punto $A(0, 9)$ al punto genérico del arco de parábola Γ , que es la función a determinar, es la siguiente:

$$\begin{aligned} d = f(x) &= \sqrt{(x-0)^2 + \left(\frac{36-x^2}{2} - 9\right)^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + \left(\frac{36-x^2-18}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{18-x^2}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + \frac{324-36x^2+x^4}{4}} = \sqrt{\frac{4x^2+324-36x^2+x^4}{4}} = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{x^4 - 32x^2 + 324}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{x^4 - 32x^2 + 324} = \underline{\underline{f(x)}}.$$

b)

Los puntos del arco Γ donde la distancia a $f(x)$ tiene mínimos relativos son los valores de x que anulan la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x^3 - 64x}{2\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}} = \frac{x^3 - 16x}{\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}} = \frac{x(x^2 - 16)}{\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}} = f'(x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x(x^2 - 16)}{\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}} = 0 \;; \; x(x^2 - 16) = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 0} \;; \; \underline{x_2 = -4} \;; \; \underline{x_3 = 4}.$$

Para encontrar los mínimos relativos recurrimos a la segunda derivada, que tiene que ser positiva para los valores que anulan la primera derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(3x^2 - 16) \cdot \sqrt{x^4 - 32x^2 + 324} - x(x^2 - 16) \cdot \frac{4x^3 - 64x}{2\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}}}{\left(\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}\right)^2} = \\ &= \frac{(3x^2 - 16) \cdot \sqrt{x^4 - 32x^2 + 324} - \frac{x(x^2 - 16) \cdot 4x(x^2 - 16)}{2\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}}}{x^4 - 32x^2 + 324} = \\ &= \frac{(3x^2 - 16) \cdot \sqrt{x^4 - 32x^2 + 324} - \frac{2x^2(x^2 - 16)^2}{\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}}}{x^4 - 32x^2 + 324} = \\ &= \frac{(3x^2 - 16)(x^4 - 32x^2 + 324) - 2x^2(x^2 - 16)^2}{(x^4 - 32x^2 + 324)\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}} = f''(x). \end{aligned}$$

$$f''(0) = \frac{-16 \cdot 324 - 0}{324\sqrt{324}} = -\frac{16}{18} = -\frac{8}{9} < 0 \Rightarrow \text{Para máximo.}$$

$$f''(4) = \frac{(48 - 16)(256 - 32 \cdot 16 + 324) - 32(16 - 16)^2}{(256 - 32 \cdot 16 + 324)\sqrt{256 - 32 \cdot 16 + 324}} = \frac{32 \cdot (580 - 512) - 0}{68\sqrt{68}} > 0 \Rightarrow \text{Para mínimo.}$$

Teniendo en cuenta la simetría con respecto al eje Y de la función, los puntos de distancia mínimo del arco Γ son los siguientes:

$$2y_{(4)} = 2y_{(-4)} = 36 - 4^2 = 36 - 16 = 20 \;; \; \underline{y_{(4)} = y_{(-4)} = 10} \Rightarrow \underline{B(-4, 10)} \;; \; \underline{C(4, 10)}.$$

c)

El valor máximo se produce para $x = 0$ y la distancia máxima es la siguiente:

$$f(0) = \frac{1}{2} \sqrt{324} = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9 \Rightarrow \underline{\underline{d_{\text{máx}} = 9 \text{ unidades}}}.$$

Los valores mínimos se producen para $x = \pm 4$ y la distancia es la siguiente:

$$f(4) = f(-4) = \frac{1}{2}\sqrt{72} = \frac{1}{2}\sqrt{36 \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \underline{\underline{d_{\min} = 3\sqrt{2} \text{ unidades}}}.$$

d)

El área de la superficie limitada por el arco de parábola Γ y el segmento rectilíneo que une los puntos $M(-6, 0)$ y $N(6, 0)$ es, considerando la simetría de la figura, la siguiente:

$$2y = 36 - x^2 \Rightarrow y = 18 - \frac{1}{2}x^2.$$

$$S = 2 \cdot \int_0^6 \left(18 - \frac{1}{2}x^2\right) \cdot dx = 2 \cdot \left[18x - \frac{x^3}{6}\right]_0^6 = 2 \cdot \left[\left(18 \cdot 6 - \frac{6^3}{6}\right) - 0\right] = 2 \cdot \left(108 - \frac{36}{1}\right) =$$

$$= 2 \cdot (108 - 36) = 2 \cdot 72 = \underline{\underline{144 \text{ u}^2}} = S.$$
