PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2009

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Se elegirán TRES bloque y se hará un problema de cada uno de ellos.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar debidamente justificados.

BLOQUE 1.- ÁLGEBRA LINEAL.

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Justificar que la matriz A tiene inversa y obtener razonadamente la matriz inversa de A, incluyendo en la respuesta todos los pasos necesarios.

b) Calcular, razonadamente, el determinante de la matriz $3A^{-1}$, incluyendo en la respuesta todos los pasos realizados.

c) Obtener razonadamente los valores reales de las incógnitas x, y, z que verifican la ecuación $xI + yA + zA^2 = B$.

----

a)

Una matriz tiene inversa (es inversible) cuando su determinante es distinto de 0.

Por ser A una matriz triangular superior, su determinante equivale al producto de los elementos de su diagonal principal y, como todos son distintos de cero, se justifica que la matriz A tiene inversa.

Vamos a obtener la matriz inversa de a de dos formas diferentes:

1ª.- Por el Método de Gauss-Jordan.

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to \frac{1}{3}F_1 \\ F_2 \to \frac{1}{3}F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - 2F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 + \frac{4}{3}F_3 \\ F_2 \rightarrow F_2 - \frac{2}{3}F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

2ª.- Considerando que $A^{-1} = \dfrac{Adj.\ A^T}{|A|}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 \;\; ;; \;\; A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj\ (A^T) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

b)

Teniendo en cuenta que el producto de un número por una matriz es la matriz que resulta de multiplicar todos y cada uno de sus elementos por el número, será:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3 \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |3A^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\underline{3 = |3A^{-1}|}}$$

c)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+0+0 & 18+18+0 & 0+12+0 \\ 0+0+0 & 0+9+0 & 0+6+2 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 9 & 36 & 12 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^2}$$

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 9 & 18 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3A}.$$

$$xI + yA + zA^2 = B \Rightarrow \quad x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 9 & 36 & 12 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Para expresar el sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas basta considerar tres sumas de elementos correspondientes de la suma de las tres matrices del primer término, una vez que se ha efectuado el producto de las incógnitas por las matrices:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y & 6y & 0 \\ 0 & 3y & 2y \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9z & 36z & 12z \\ 0 & 9z & 8z \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x + 3y + 9z &= 18 \\ 6y + 36z &= 48 \\ 12z &= 12 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + 3y + 9z &= 18 \\ y + 6z &= 8 \\ \underline{\underline{z = 1}} & \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \quad x + 6 + 9 = 18 \;;;\; \underline{\underline{x = 3}} \\ \rightarrow \; &\underline{\underline{y = 2}} \\ & \end{aligned}$$

****

2º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}(\alpha+3)x-4y-2z=4\\ x-2y-(\alpha+2)z=2\\ 2x+(\alpha-3)y-2z=4\end{cases}$, se pide razonando las respuestas:

a) Justificar que para el valor α = 0 el sistema es incompatible.

b) Determinar los valores del parámetro α para los cuales el sistema es compatible y determinado.

c) Resolver el sistema para el valor del parámetro α para el cual es compatible indeterminado.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix}\alpha+3 & -4 & -2\\ 1 & -2 & -\alpha-2\\ 2 & \alpha-3 & -2\end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix}\alpha+3 & -4 & -2 & 4\\ 1 & -2 & -\alpha-2 & 2\\ 2 & \alpha-3 & -2 & 4\end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es la siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix}\alpha+3 & -4 & -2\\ 1 & -2 & -\alpha-2\\ 2 & \alpha-3 & -2\end{vmatrix}=4(\alpha+3)-2(\alpha-3)-8(-\alpha-2)-8-(\alpha-3)(-\alpha-2)(\alpha+3)-8=$$

$$=4\alpha+12-2\alpha+6+8\alpha+16-16+(\alpha-3)(\alpha^2+3\alpha+2\alpha+6)=$$

$$=10\alpha+18+(\alpha-3)(\alpha^2+5\alpha+6)=10\alpha+18+\alpha^3+5\alpha^2+6\alpha-3\alpha^2-15\alpha-18=\alpha^3+2\alpha^2+\alpha=$$

$$=\alpha(\alpha^2+2\alpha+1)=\alpha(\alpha+1)=0\ \Rightarrow\ \underline{\alpha_1=0}\ ;;\ \underline{\alpha_2=-1}$$

$$Para\ \ \alpha=0\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix}3 & -4\\ 1 & -2\end{vmatrix}\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M=2}$$

$$Para\ \ \alpha=0\ es\ \ M'=\begin{pmatrix}3 & -4 & -2 & 4\\ 1 & -2 & -2 & 2\\ 2 & -3 & -2 & 4\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ Rango\ \ M'\ \Rightarrow\ \{C_1,\ C_2,\ C_4\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \begin{vmatrix}3 & -4 & 4\\ 1 & -2 & 2\\ 2 & -3 & 4\end{vmatrix}=-24-12-16+16+18+16=-52+50=-2\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=3}$$

Aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{\underline{Para\ \ \alpha = 0\ \Rightarrow\ Rango\ \ M = 2\ \ ;;\ \ Rango\ \ M' = 3\ \Rightarrow\ Sistema\ \ Incompatible,\ \ c.q.j.}}$$

b)

De la expresión del rango de M: $|M| = \alpha(\alpha+1)^2$ y teniendo en cuenta que el Teorema de Rouché-Fröbenius dice que un sistema es compatible determinado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e igual al número de incógnitas, en este caso tiene que ser Rango M = Rango M' = 3, para lo cual tiene que ser: $|M| = \alpha(\alpha+1)^2 \neq 0$.

$$\underline{\underline{Para\ \ \begin{Bmatrix} \alpha \neq 0 \\ \alpha \neq -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ \ M = Rango\ \ M' = 3 = n^o\ \ incóg. \Rightarrow Sistema\ \ Compatible\ \ Deter\min ado}}$$

c)

Como es Rango M = 2, según el mencionado teorema, para que el sistema sea compatible indeterminado tiene que ser Rango M' = 2.

$$Para\ \ \alpha = -1\ \ es\ \ M' = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_3\} \Rightarrow \underline{Rango\ \ M' = 2}$$

$$\underline{Para\ \ \alpha = -1 \Rightarrow Rango\ \ M = Rango\ \ M' = 2 < n^o\ \ incóg. \Rightarrow Sistema\ \ Compatible\ \ In\det er\min ado}$$

Para α = -1 el sistema es $\begin{cases} 2x-4y-2z=4 \\ x-2y-z=2 \\ 2x-4y-2z=4 \end{cases}$, equivalente a $\{x-2y-z=2$, que es una ecuación con tres incógnitas, es decir: con dos grados de libertad, por lo cual, parametrizando dos de las variables, por ejemplo $\underline{y=\lambda},\ \underline{z=\mu} \Rightarrow \underline{x = 2+2\lambda+\mu}$.

$$\underline{\underline{Sólución: \begin{cases} x = 2+2\lambda+\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases},\ \ \forall \lambda,\ \mu \in R}}$$

****

BLOQUE 2.- GEOMETRÍA.

1º) Sean A, B y C los puntos de intersección con los tres ejes de coordenadas OX, OY y OZ, respectivamente, del plano $\pi \equiv x+4y-2z-4=0$. Se pide calcular razonadamente:

a) El área del triángulo ABC.

b) El perímetro del triángulo ABC.

c) Los tres ángulos interiores del triángulo ABC.

----

a)

Los puntos de corte con los ejes coordenados del plano $\pi \equiv x+4y-2z-4=0$ son:

$$\pi \equiv x+4y-2z-4=0 \begin{cases} OX \ \rightarrow \ \{y=0 \ ;; \ z=0\} \ \rightarrow \ x-4=0 \ ;; \ x=4 \ \rightarrow \ \underline{A(4,\ 0,\ 0)} \\ OY \ \rightarrow \ \{x=0 \ ;; \ z=0\} \ \rightarrow \ 4y-4=0 \ ;; \ y=1 \ \rightarrow \ \underline{B(0,\ 1,\ 0)} \\ OZ \ \rightarrow \ \{x=0 \ ;; \ y=0\} \ \rightarrow \ -2z-4=0 \ ;; \ z=-2 \ \rightarrow \ \underline{C(0,\ 0,\ -2)} \end{cases}$$

Los puntos A, B y C determinan los vectores:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(0,\ 1,\ 0)-(4,\ 0,\ 0)=\underline{(-4,\ 1,\ 0)=\overrightarrow{AB}}$$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(0,\ 0,\ -2)-(4,\ 0,\ 0)=\underline{(-4,\ 0,\ -2)=\overrightarrow{AC}}$$

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Conviene saber que el área del paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan, por lo tanto:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|=\left|-i+2k-4j\right|=\left|-i-4j+2k\right|=$$

$$=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+2^2}=\sqrt{1+16+4}=\underline{\underline{\sqrt{21}\ u^2=S_{ABC}}}$$

b)

$$p_{ABC}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\sqrt{(0-4)^2+(1-0)^2+0^2}+\sqrt{0^2+(0-1)^2+(-2-0)^2}+$$

$$+\sqrt{(4-0)^2+0^2+(0+2)^2}=\sqrt{16+1}+\sqrt{1+4}+\sqrt{16+4}=\sqrt{17}+\sqrt{5}+\sqrt{20}\cong 4'12+2'24+4'47=$$

$$=\underline{\underline{10'83\ unidades=p_{ABC}}}$$

c) Los tres ángulos interiores del triángulo ABC.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\ A\ \Rightarrow\ \cos\ A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{(-4,\ 1,\ 0)\cdot(-4,\ 0,\ -2)}{\sqrt{(-4)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}}=$$

$$=\frac{16-0-0}{\sqrt{16+1}\cdot\sqrt{16+4}}=\frac{16}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{20}}=\frac{16}{\sqrt{340}}=\frac{16}{18'4391}=\underline{0'8677=\cos\ A}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{A=29^{\circ}\ 48'\ 18''}}$$

$$\overrightarrow{BA}=A-B=(4,\ 0,\ 0)-(0,\ 1,\ 0)=\underline{(4,\ -1,\ 0)=\overrightarrow{BA}}$$

$$\overrightarrow{BC}=C-B=(0,\ 0,\ -2)-(0,\ 1,\ 0)=\underline{(0,\ -1,\ -2)=\overrightarrow{BC}}$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\cos\ B\ \Rightarrow\ \cos\ B=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{(4,\ -1,\ 0)\cdot(0,\ -1,\ -2)}{\sqrt{4^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}}=$$

$$=\frac{0+1-0}{\sqrt{16+1}\cdot\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{75}}=\frac{1}{8'6603}=\underline{0'1155=\cos\ B}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{B=83^{\circ}\ 22'\ 9''}}$$

$$A+B+C=180^{\circ}\ \Rightarrow C=180^{\circ}-(A+B)=180^{\circ}-(29^{\circ}\ 48'\ 18''+83^{\circ}\ 22'\ 9'')=180^{\circ}-113^{\circ}\ 10'\ 27''=$$

$$=\underline{\underline{66^{\circ}\ 49'\ 33''=C}}$$

****

2º) Dados los puntos O(0, 0, 0), A(4, 4, 0) y P(0, 0, 12), se pide obtener razonadamente:

a) La ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular al plano de ecuación z = 0.

b) La ecuación del plano π que cumpla las dos siguientes condiciones:

· Pasa por P y por un punto Q de la recta $r \equiv x = y = 4$

· Sea perpendicular a la recta s que pasa por O y Q.

----

a)

El vector normal del plano z = 0 es $\overrightarrow{n} = (0,\ 0,\ 1)$.

La ecuación vectorial de la recta r que pasa por A y es perpendicular a z = 0 es:

$$\underline{\underline{r \equiv (x,\ y,\ z) = (4,\ 4,\ 0) + \lambda(0,\ 0,\ 1)}}$$

b)

Los puntos genéricos de la recta $r \equiv x = y = 4$ son de la forma $Q'(4,\ 4,\ \alpha)$, siendo α un valor real cualquiera, por ejemplo: $Q(4,\ 4,\ \alpha)$

El vector que pasa por los puntos O y Q es $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OQ} = (4,\ 4,\ \alpha)$.

La ecuación del haz de los infinitos planos perpendiculares a la recta s es la siguiente: $\beta \equiv 4x + 4y + \alpha z + D = 0$.

De los infinitos planos perpendiculares a r, el que contiene a los puntos P y Q es el que satisface sus ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv 4x + 4y + \alpha z + D = 0 \\ P(0,\ 0,\ 12) \end{array}\right\} \Rightarrow\ 0 + 0 + 12\alpha + D = 0\ \ ;;\ \ \underline{12\alpha + D = 0} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv 4x + 4y + \alpha z + D = 0 \\ Q(4,\ 4,\ \alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow\ 16 + 16 + \alpha^2 + D = 0\ \ ;;\ \ \underline{\alpha^2 + D = -32} \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} 12\alpha + D = 0 \\ \alpha^2 + D = -32 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow D = -12\alpha \\ \rightarrow D = -32 - \alpha^2 \end{array} \Rightarrow\ 12\alpha = \alpha^2 + 32\ \ ;;\ \ \alpha^2 - 12\alpha + 32 = 0\ \Rightarrow \begin{cases} \underline{\alpha_1 = 4} \rightarrow \underline{D_1 = -48} \\ \underline{\alpha_2 = 8} \rightarrow \underline{D_2 = -96} \end{cases}$$

$$\pi_1 \equiv 4x + 4y + 4z - 48 = 0 \;\rightarrow\; \underline{\underline{\pi_1 \equiv x + y + z - 12 = 0}}$$

$$\pi_2 \equiv 4x + 4y + 8z - 96 = 0 \;\rightarrow\; \underline{\underline{\pi_2 \equiv x + y + 2z - 24 = 0}}$$

****

BLOQUE 3.- ANÁLISIS.

1º) a) Determinar, razonadamente, el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\frac{1}{(3-x)(3+x)}$.

b) Obtener razonadamente los valores de A y B tales que $\frac{1}{(3-x)(3+x)}=\frac{A}{3-x}+\frac{B}{3+x}$.

c) Calcular razonadamente el área de la superficie S limitada por el eje OX, la curva $y=\frac{1}{(3-x)(3+x)}$ y las rectas x = -2 y x = 2.

----

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es el conjunto de los números reales, excepto los valores que anulan el denominador, o sea:

$$\underline{\underline{D(f)\ \Rightarrow\ R-\{-3,\ 3\}}}$$

Una función es creciente o decreciente para los valores que hacer positiva o negativa su derivada, respectivamente.

$$f(x)=\frac{1}{(3-x)(3+x)}=\frac{1}{9-x^2}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{-1\cdot(-2x)}{\left(9-x^2\right)^2}=\underline{\frac{2x}{\left(9-x^2\right)^2}=f'(x)}.$$

Por ser el denominador positivo para los valores $x\in D(f)$, la derivada es positiva o negativa cuando lo sea el numerador, o sea:

$$\underline{\underline{Creciente\ \Rightarrow\ f'(x)>0\ \Rightarrow\ x>0\ \Rightarrow\ (0,\ 3)\cup(3,\ +\infty)}}$$

$$\underline{\underline{Decreciente\ \Rightarrow\ f'(x)<0\ \Rightarrow\ x<0\ \Rightarrow\ (-\infty,\ -3)\cup(-3,\ 0)}}$$

b)

$$\frac{1}{(3-x)(3+x)}=\frac{A}{3-x}+\frac{B}{3+x}=\frac{3A+Ax+3B-Bx}{(3-x)(3+x)}=\frac{(A-B)x+(3A+3B)}{(3-x)(3+x)}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{r}A-B=0\\3A+3B=1\end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}3A-3B=0\\3A+3B=1\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ 6A=1\ ;;\ \underline{\underline{A=\frac{1}{6}}}\ ;;\ A-B=0\ ;;\ \underline{\underline{B=\frac{1}{6}}}$$

c)

En el intervalo [-2, 2] todas las ordenadas de la curva $y=\frac{1}{(3-x)(3+x)}$ son positivas, por lo cual la superficie pedida es la siguiente:

$$S=\int_{-2}^{2}\frac{1}{(3-x)(3+x)}\cdot dx=\frac{1}{6}\cdot\int_{-2}^{2}\frac{1}{3-x}\cdot dx+\frac{1}{6}\cdot\int_{-2}^{2}\frac{1}{3+x}\cdot dx=\frac{1}{6}\cdot\int_{-2}^{2}\frac{1}{3+x}\cdot dx-\frac{1}{6}\cdot\int_{-2}^{2}\frac{1}{x-3}\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{6}\left[L(3+x)\right]_{-2}^{2}-\frac{1}{6}\left[L\,|\,x-3\,|\right]_{-2}^{2}=\frac{1}{6}\left[L(3+x)-L\,|\,x-3\,|\right]_{-2}^{2}=\frac{1}{6}\left[L\left|\frac{3+x}{x-3}\right|\right]_{-2}^{2}=\frac{1}{6}\cdot\left(L\frac{5}{1}-L\frac{1}{5}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\left(L\,5-L\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{6}\cdot\left[L\,5-(L\,1-L\,5)\right]=\frac{1}{6}\cdot(L\,5-0+L\,5)=\frac{1}{6}\cdot 2\,L\,5=\underline{\underline{\frac{L\,5}{3}\cong 0'54\ u^{2}=S}}$$

****

2º) Dada la función real $f(x)=e^{x}-e^{-x}$, se pide calcular razonadamente:

a) La función $f(x)+f(-x)$.

b) La integral $\int_{-a}^{a} f(x)dx$, donde a es un número real positivo.

c) El punto de inflexión de f(x).

----

a)

$$f(x)+f(-x)=\left(e^{x}-e^{-x}\right)+\left(e^{-x}-e^{-(-x)}\right)=e^{x}-e^{-x}+e^{-x}-e^{x}=0$$

$$\underline{\underline{f(x)+f(-x)=0}}$$

b)

$$I=\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{a}\left(e^{x}-e^{-x}\right)dx=\int_{-a}^{a} e^{x}\,dx-\int_{-a}^{a} e^{-x}\,dx=\int_{-a}^{a} e^{x}\,dx+\int_{a}^{-a} e^{-x}\,dx=I_1+I_2=I \qquad (*)$$

$$I_1=\int_{-a}^{a} e^{x}\,dx=\left[e^{x}\right]_{-a}^{a}=e^{a}-e^{-a}=e^{a}-\frac{1}{e^{a}}=\underline{\frac{e^{2a}-1}{e^{a}}=I_1}$$

$$I_2=\int_{a}^{-a} e^{-x}\,dx \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{c|c} -x=t & x=-a\rightarrow t=a \\ dx=-dt & x=a\rightarrow t=-a \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; I_2=-\int_{-a}^{a} e^{t}\,dt=-\left[e^{t}\right]_{-a}^{a}=-\left(e^{a}-e^{-a}\right)=$$

$$-\left(e^{a}-\frac{1}{e^{a}}\right)=\frac{1}{e^{a}}-e^{a}=\underline{\frac{1-e^{2a}}{e^{a}}=I_2}$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de I_1 e I_2:

$$I=I_1+I_2=\frac{e^{2a}-1}{e^{a}}+\frac{1-e^{2a}}{e^{a}}=0$$

$$\underline{\underline{I=\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{a}\left(e^{x}-e^{-x}\right)dx=0}}$$

c)

Para que una función tenga un punto de inflexión es necesario que se anule su segunda derivada:

$$f'(x)=e^{x}+e^{-x} \;;;\; f''(x)=e^{x}-e^{-x}=0 \;;;\; e^{x}=e^{-x}=\frac{1}{e^{x}} \;;;\; e^{2x}=1 \;\Rightarrow\; \underline{x=0}$$

$$f(0)=e^{0}-e^{-0}=1-1=0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Punto\ de\ \inf lexión:\ O(0,\ 0)}}$$

****

BLOQUE 4.- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

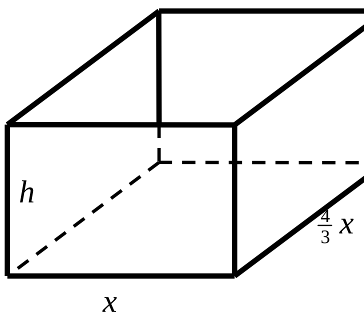
1º) Se desea construir una bodega con forma de paralelepípedo rectangular de 100 m^3 de volumen de manera que el largo de su base sea 4/3 de la anchura x de su base. Se sabe que los precios de un metro cuadrado de suelo, techo y pared lateral son, respectivamente, 225 euros/m^2, 300 euros/m^2 y 256 euros/m^2. Determinar razonadamente:

a) El valor de x de la anchura de la base que minimiza el coste.

b) Dicho coste mínimo.

----

a)



$$V = x \cdot \frac{4}{3}x \cdot h = \frac{4x^2 h}{3} = 100\ m^3 \Rightarrow \quad h = \frac{75}{x^2} \qquad (*)$$

$$Coste = C = 225 \cdot \frac{4x^2}{3} + 300 \cdot \frac{4x^2}{3} + 256 \cdot h\left(2x + 2 \cdot \frac{4x}{3}\right) =$$

$$= 300x^2 + 400x^2 + 512 \cdot h \cdot \frac{3x+4x}{3} = \underline{700x^2 + \frac{3584}{3}x\,h = C}$$

Sustituyendo el valor de h en la expresión del coste, queda:

$$C(x) = 700x^2 + \frac{3584}{3}x \cdot \frac{75}{x^2} = 700x^2 + \frac{89600}{x} = \underline{700\left(x^2 + \frac{128}{x}\right) = C(x)}$$

Para que el coste sea mínimo, su derivada tiene que ser cero:

$$C'(x) = 700 \cdot \left(2x - \frac{128}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{128}{x^2} = 0 \ ;;\ 2x^3 = 128 \ ;;\ x^3 = 64 \ ;;\ \underline{\underline{x = 4\ metros}}$$

b)

Sustituyendo en valor de x en la expresión del coste:

$$Coste = 700\left(4^2 + \frac{128}{4}\right) = 700 \cdot (16+32) = 700 \cdot 48 = \underline{\underline{33.600\ \ euiros = Coste}}$$

La justificación de que es un mínimo se deduce de la 2ª derivada del coste:

$$C''(x) = 700 \cdot \left(2 + \frac{256x}{x^4}\right) = 700 \cdot \left(2 + \frac{256}{x^3}\right)$$

$$C''(4) = 700 \cdot \left(2 + \frac{256}{4^3}\right) = 700 \cdot (2+4) > 0 \Rightarrow \underline{Mínimo, \quad c.q.j.}$$

****

2º) Un proveedor vende un producto a un comerciante al precio de 300 euros la unidad. El comerciante incrementa la cantidad de 300 euros en un 40 % para obtener el precio de venta al público. El comerciante sabe que a ese precio venderá 50 unidades cada mes y que durante el mes de rebajas por cada 3 euros de reducción en el precio de venta de la unidad conseguirá un incremento de ventas de 5 unidades. Se pide determinar, razonadamente, el número de unidades que debe pedir al proveedor para venderlas en el mes de rebajas y el precio de venta de cada unidad, para maximizar sus beneficios durante ese período.

Precio de compra del comerciante: 300 euros.

Precio de venta al público: 300 + 40 % de 300 = 300 +0'4 · 300 = 420 euros.

A 420 euros unidad vende 50 unidades al mes. <u>El beneficio es de 120 euros</u>.

El beneficio al mes es: B = 50 · (420 – 300) = 50 · 120 = 6.000 euros.

En general, llamando x al beneficio por unidad e y al número de unidades del producto vendidos, el beneficio mensual es: $B = x \cdot y$.

En el mes de las rebajas, considerando que si disminuye el precio en 3 euros aumenta en 5 el número de unidades vendidas, el beneficio por unidad es x = (120 – 3y) y el número de unidades vendidas es (50 + 5y).

El Beneficio mensual, en función del número de unidades vendidas, puede expresarse de la forma siguiente:

$$B(y) = (120 - 3y) \cdot (50 + 5y) = 6000 + 600y - 150y - 15y^2 = \underline{-15y^2 + 450y + 6000 = B(y)}.$$

El beneficio será máximo cuando su derivada sea cero:

$$B'(y) = -30y + 450 = 0 \;\; ;; \;\; y = \frac{450}{30} = \underline{15 = y}$$

El precio por unidad es: 420 – 3 · 15 = 420 – 45 = 375 euros.

El número de unidades es: 50 + 5 · 15 = 50 + 75 = 125.

El beneficio por unidad es x = 120 – 3 · 15 = 120 – 45 = 75 euros/unidad.

El beneficio del mes de rebajas es: B = 125 · 75 = 9375 euros

<u>El beneficio máximo se produce vendiendo 125 unidades a 375 euros cada una.</u>

La justificación de que se trata de un máximo se deduce de la segunda derivada del beneficio: $B''(x) = -30 < 0 \Rightarrow \text{Máximo.}$

****