PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

SEPTIEMBRE – 2009

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Se elegirán TRES bloque y se hará un problema de cada uno de ellos.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar debidamente justificados.

BLOQUE 1.- ÁLGEBRA LINEAL.

1º) Dada la matriz $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a-2 \\ 4 & 3 & 2 \\ a & a & -6 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular, en función de α, el determinante de la matriz A(α), escribiendo los cálculos necesarios.

b) Determinar, razonadamente, los números reales α para los que el determinante de la matriz inversa de A(α) es igual a 1/66.

----

a)

$$|A(a)|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & a-2 \\ 4 & 3 & 2 \\ a & a & -6 \end{vmatrix}=-18+4a(a-2)+4a-3a(a-2)-2a+48=30+a(a-2)+2a=$$

$$=30+a^2-2a+2a=30+a^2=0 \;\Rightarrow\; \underline{a\notin R}$$

$$\underline{\underline{Rango\;\; A(a)=3,\;\; \forall a\in R}}$$

b)

Sabiendo que $|A^{-1}(a)|=\frac{1}{|A(a)|}$:

$$|A^{-1}(a)|=\frac{1}{|A(a)|}=\frac{1}{30+a^2}=\frac{1}{66} \;\Rightarrow\; 30+a^2=66 \;;;\; a^2=66-30=36 \;\Rightarrow\; \underline{a_1=6} \;;;\; \underline{a_2=-6}.$$

$$Los \;\; valores \;\; reales \;\; que \;\; hacen \;\; \left| A(a) \right| = \frac{1}{66} \;\; son \;\; a = -6 \;\; y \;\; a = 6$$

****

2º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 5x+7y+az=0 \end{cases}$, se pide:

a) Deducir, razonadamente, para que valores de α el sistema sólo admite la solución trivial (x, y, z) = (0, 0, 0).

b) Resolver, razonadamente, el sistema para el valor de α que lo hace indeterminado.

----

a)

La matriz de coeficientes del sistema homogéneo es $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & a \end{pmatrix}$.

El sistema homogéneo que solamente admite la solución trivial es compatible determinado que, según el Teorema de Rouché-Fröbenius, el rango de la matriz de coeficientes tiene que ser igual que el número de incógnitas, o sea, tres.

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & a \end{vmatrix}=0 \;\;;;\;\; 3a+14+20-15-28-2a=0 \;\;;;\;\; a-9=0 \;\;;;\;\; \underline{a=9}.$$

$$\underline{\underline{El\ \ sistema\ \ admite\ \ la\ \ solución\ \ (x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 0)\ \ \forall \alpha \in R,\ \ \alpha \neq 9}}$$

b)

El sistema es compatible indeterminado para α = 9 y resulta $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 5x+7y+9z=0 \end{cases}$.

Despreciando una ecuación (la tercera) y parametrizando una incógnita ($z=\lambda$):

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=-\lambda \\ 2x+3y=-4\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x-2y=2\lambda \\ 2x+3y=-4\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=-2\lambda} \;\;;;\;\; x+y=-\lambda \;\;;;$$

$$x=-y-\lambda=2\lambda-\lambda=\underline{\lambda=x}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=\lambda \\ y=-2\lambda, \quad \forall \lambda \in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

BLOQUE 2.- GEOMETRÍA.

1º) Dados los puntos P(3, -1, 4) y Q(1, 0, -1), y el plano $\pi \equiv x-2y+2z+5=0$. Se pide calcular razonadamente:

a) La ecuación de la recta r que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π.

b) La ecuación de los planos que pasan por el punto P y son perpendiculares al plano π.

c) La ecuación del plano π' que pasa por los puntos P y Q y es perpendicular al plano π.

----

a)

La recta r tiene como vector director a cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector normal del plano, que es $\overrightarrow{n}=(1,\ -2,\ 2)$.

La expresión vectorial de la recta r, perpendicular al plano $\pi \equiv x-2y+2z+5=0$ y que pasa por el punto P(3, -1, 4), es la siguiente:

$$\underline{\underline{r \equiv (x,\ y,\ z)=(3,\ -1,\ 4)+\lambda(1,\ -2,\ 2)}}$$

b)

Los planos que pasan por el punto P y son perpendiculares al plano π, que son infinitos, constituyen el haz de planos α que contienen a la recta r hallada en el apartado anterior.

La expresión de α en su forma general es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-4}{2} \ \Rightarrow \ r \equiv \begin{cases} -2x+6=y+1 \\ 2x-6=z-4 \end{cases} \ ;; \ r \equiv \begin{cases} 2x+y-5=0 \\ 2x-z-2=0 \end{cases}.$$

La recta r expresada por dos ecuaciones implícitas, (que son cada una de ellas un plano perteneciente al haz α que buscamos).

Para conseguir un plano cualquiera de α basta con dar cualquier valor real a λ en la siguiente expresión, que es la solución a lo pedido:

$$\underline{\underline{\alpha \equiv 2x+y-5+\lambda(2x-z-2)=0}}$$

c)

El plano π', por ser perpendicular al plano π, tiene como vector director al vector normal de π, $\overrightarrow{n}=(1,\ -2,\ 2)$ y también es vector director de π' el que determinan los puntos P y Q: $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{QP}=P-Q=(3,\ -1,\ 4)-(1,\ 0,\ -1)=(2,\ -1,\ 5)$.

La ecuación general de π', considerando por ejemplo el punto Q(1, 0, -1) es la siguiente:

$$\pi'\left(Q;\ \overrightarrow{n},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \ \ ;; \ \ -10(x-1)-(z+1)+4y+4(z+1)+2(x-1)-5y=0 \ \ ;;$$

$$-8(x-1)-y+3(z+1)=0 \ \ ;; \ \ -8x+8-y+3z+3=0 \ \ ;; \ \ -8x-y+3z+11=0.$$

$$\underline{\underline{\pi' \equiv 8x+y-3z-11=0}}$$

****

2º) Sea el plano $\pi \equiv 3x+2y+4z-12=0$, calcular razonadamente:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 5 unidades de π.

b) Los tres puntos A, B y C, intersección del plano π con cada uno de los ejes coordenados.

c) Los tres ángulos del triángulo ABC.

----

a)

El haz de planos paralelos a $\pi \equiv 3x+2y+4z-12=0$ tiene por ecuación general la expresión $\alpha \equiv 3x+2y+4z+D=0$, con $D \in R$.

Dados los planos paralelos $\pi_1 \equiv Ax+By+Cz+D_1=0$ y $\pi_2 \equiv Ax+By+Cz+D_2=0$, su distancia viene dada por la fórmula: $d(\pi_1,\ \pi_2)=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+D^2}}$.

Aplicando la fórmula a los planos π y α sabiendo que la distancia es de 5 unidades:

$$d(\pi,\ a)=5=\frac{|-12-D|}{\sqrt{3^2+2^2+4^2}}=\frac{|-12-D|}{\sqrt{9+4+16}}=\frac{|-12-D|}{\sqrt{29}}=5 \Rightarrow |-12-D|=5\sqrt{29} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} -12-D=5\sqrt{29} \rightarrow \underline{D_1=-12-5\sqrt{29}} \\ \\ 12+D=5\sqrt{29} \rightarrow \underline{D_2=5\sqrt{29}-12} \end{cases}\right\}=3 \Rightarrow \text{Los planos pedidos son:}$$

$$\underline{\underline{\pi_1 \equiv 3x+2y+4z-\left(12+5\sqrt{29}\right)=0}} \quad y \quad \underline{\underline{\pi_2 \equiv 3x+2y+4z+\left(5\sqrt{29}-12\right)=0}}$$

b)

Los puntos A, B y C, intersección del plano $\pi \equiv 3x+2y+4z-12=0$ con los ejes OX, OY, OZ, respectivamente, son los siguientes:

$$Eje\ \ OX \Rightarrow \left.\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow 3x-12=0\ ;;\ x=4 \Rightarrow \underline{A(4,\ 0,\ 0)}$$

$$Eje\ \ OY \Rightarrow \left.\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow 2y-12=0\ ;;\ y=6 \Rightarrow \underline{B(0,\ 6,\ 0)}$$

$$Eje\ \ OZ \Rightarrow \left.\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow 4z-12=0\ ;;\ z=3 \Rightarrow \underline{C(0,\ 0,\ 3)}$$

c)

El ángulo A lo determinan los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 6,\ 0) - (4,\ 0,\ 0) = (-4,\ 6,\ 0)$.

$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 0,\ 3) - (4,\ 0,\ 0) = (-4,\ 0,\ 3)$.

El ángulo B lo determinan los vectores $\vec{c} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a} = (4,\ -6,\ 0)$ y $\vec{d} = \overrightarrow{BC}$.

$\vec{d} = \overrightarrow{BC} = C - B = (0,\ 0,\ 3) - (0,\ 6,\ 0) = (0,\ -6,\ 3)$.

El ángulo C lo determinan los vectores $\vec{e} = \overrightarrow{CA} = -\vec{b} = (4,\ 0,\ -3)$ y $\vec{f} = \overrightarrow{CB} = -\vec{d} =$

$= (0,\ 6,\ -3)$.

Aplicando el concepto de producto escalar de dos vectores:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\ \alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\ \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} \quad \Rightarrow$$

$$\cos\ A = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{(-4,\ 6,\ 0) \cdot (-4,\ 0,\ 3)}{\sqrt{(-4)^2 + 6^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{16 + 0 + 0}{\sqrt{16+36} \cdot \sqrt{16+9}} = \frac{16}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{25}} = \frac{16}{\sqrt{1300}} =$$

$$= 0'4438 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A = 63^o\ \ 39'\ \ 21''}}$$

$$\cos\ B = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{\left|\vec{c}\right| \cdot \left|\vec{d}\right|} = \frac{(4,\ -6,\ 0) \cdot (0,\ -6,\ 3)}{\sqrt{4^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + 3^2}} = \frac{0 + 36 + 0}{\sqrt{16+36} \cdot \sqrt{36+9}} = \frac{36}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{45}} = \frac{36}{\sqrt{2340}} =$$

$$= 0'7742 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{B = 41^o\ \ 54'\ \ 32''}}$$

$$\cos\ C = \frac{\vec{e} \cdot \vec{f}}{\left|\vec{e}\right| \cdot \left|\vec{f}\right|} = \frac{(4,\ 0,\ -3) \cdot (0,\ 6,\ -3)}{\sqrt{4^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{6^2 + (-3)^2}} = \frac{0 + 0 + 9}{\sqrt{16+9} \cdot \sqrt{36+9}} = \frac{9}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{45}} = \frac{9}{\sqrt{1125}} =$$

$$= 0'2683 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{C = 74^o\ \ 26'\ \ 7''}}$$

****

BLOQUE 3.- ANÁLISIS.

1º) Se consideran las funciones reales $f(x)=2x^2+12x-6$ y $g(x)=(x-2)(x^2+9)$. Se pide obtener razonadamente:

a) Las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de la función $\frac{f(x)}{g(x)}$.

b) La función $H(x)=\int \frac{f(x)}{g(x)} \cdot dx$ que cumple que $H(3)=\frac{\pi}{3}$.

----

a)

Asíntotas horizontales: son los valores finitos de la función cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)} = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \underline{\underline{y=0}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función valga más o menos infinito; son los valores que anulan el denominador.

$$(x-2)(x^2+9)=0 \Rightarrow (x-2)=0,\ \underline{\underline{x=2}}\ ;;\ (x^2+9)\neq 0,\ \forall x \in R.$$

Asíntotas oblicuas: No tiene. (para que una función tenga asíntotas oblicuas es necesario que sea racional y que el grado del denominador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

b)

$$H(x)=\int \frac{f(x)}{g(x)} \cdot dx = \int \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)} \cdot dx = 2 \cdot \int \frac{x^2+6x-3}{(x-2)(x^2+9)} \cdot dx = 2 \cdot \int \left(\frac{1}{x-2}+\frac{B}{x^2+9}\right) \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int \frac{x^2+9+Bx-2B}{(x-2)(x^2+9)} \cdot dx = 2 \cdot \int \frac{x^2+Bx+(9-2B)}{(x-2)(x^2+9)} \cdot dx \Rightarrow \underline{B=6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(x)=2 \cdot \int \left(\frac{1}{x-2}+\frac{6}{x^2+9}\right) \cdot dx = 2 \cdot \int \frac{1}{x-2} \cdot dx + 12 \cdot \int \frac{1}{x^2+9} = \underline{2I_1+12I_2=H(x)} \qquad (*)$$

$$I_1=\int \frac{1}{x-2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-2=t \\ dx=dt \end{array} \right\} \Rightarrow I_1=\int \frac{dt}{t} = L|t| = \underline{L|x-2|=I_1}$$

$$I_2=\int \frac{1}{x^2+9} \cdot dx = \int \frac{1}{9\left(\frac{x^2}{9}+1\right)} \cdot dx = \frac{1}{9} \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{x}{3}=t \\ dx=3\,dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{9} \cdot \int \frac{1}{t^2+1} \cdot 3\,dx =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{t^2+1} \cdot dx = \frac{1}{3}\ arc\ tag\ t = \underline{\frac{1}{3}\ arc\ tag\ \frac{x}{3} = I_2}$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de I_1 e I_2 resulta:

$$H(x) = 2\,I_1 + 12\,I_2 = 2\,L\left|\,x-2\,\right| + 12\cdot\frac{1}{3}\ arc\ tag\ \frac{x}{3} + C = \underline{L\,(x-2)^2 + 4\ arc\ tag\ \frac{x}{3} + C = H(x)}.$$

Determinamos ahora el valor de C que hace que la función H(x) valga $\frac{\pi}{3}$ para el valor x = 3:

$$H(3) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow L\,(3-2)^2 + 4\ arc\ tag\ \frac{3}{3} + C = L1 + 4\ arc\ tag\ 1 + C = 0 + 4\cdot\frac{\pi}{4} + C = \pi + C = \frac{\pi}{3}\ \ ;;$$

$$C = \frac{\pi}{3} - \pi = \frac{\pi - 3\pi}{3} = \underline{-\frac{2\pi}{3} = C}$$

$$\underline{\underline{H(x) = L\,(x-2)^2 + 4\ arc\ tag\ \frac{x}{3} - \frac{2\pi}{3}}}$$

****

2º) Dada la función real $f(x)=\frac{8}{1+x^2}$, se pide calcular razonadamente:

a) Las derivadas primera y segunda de la función.

b) Los puntos de inflexión de la curva y = f(x).

c) La pendiente máxima de las rectas tangentes a la curva y = f(x).

----

a)

$$f'(x)=\frac{0-8\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\underline{\underline{-16\cdot\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}}}$$

$$f''(x)=-16\cdot\frac{1\cdot\left(1+x^2\right)^2-x\cdot 2\cdot\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4}=-16\cdot\frac{1+x^2-4x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=\underline{\underline{-16\cdot\frac{1-3x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=f''(x)}}$$

b)

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule la segunda derivada.

$$f''(x)=0\ \Rightarrow\ -16\cdot\frac{1-3x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=0\ ;;\ 1-3x^2=0\ ;;\ x^2=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ \underline{x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}}\ ;;\ \underline{x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

La condición necesaria anterior no es suficiente para asegurar los puntos de inflexión; es necesario que no se anule la tercera derivada para los valores que anulan la segunda derivada.

$$f'''(x)=-16\cdot\frac{-6x\cdot\left(1+x^2\right)^3-6x\cdot 3\cdot\left(1-3x^2\right)^2\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^6}=-16\cdot\frac{-6x-6x^3-6x\left(1-3x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}=$$

$$=-16\cdot\frac{-6x-6x^3-6x+18x^3}{\left(1+x^2\right)^4}=-16\cdot\frac{12x^3-12x}{\left(1+x^2\right)^4}=\underline{-192\cdot\frac{x\left(x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}=f'''(x)}$$

$$f'''\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=-192\cdot\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^3}=64\sqrt{3}\cdot\frac{-\frac{2}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^3}\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{\textit{Punto de inflexión para } -\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

$$f\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{8}{1+\frac{1}{3}}=\frac{8}{\frac{4}{3}}=6\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\textit{Punto de Inflexión}:\ A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ 6\right)}}$$

Teniendo en cuenta que la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas, por ser $f(x) = f(-x)$, tiene otro punto de inflexión en $\underline{\underline{B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 6\right)}}$.

c)

Teniendo en cuenta que la pendiente a una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto, la pendiente máxima de las rectas tangentes a la curva y = f(x) son los máximos relativos de la primera derivada, o sea, que son los valores que anulan la segunda derivada y hacen negativa a la tercera derivada.

Los valores que anulan la segunda derivada son $\underline{x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$;; $\underline{x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}}$.

$$f'''\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -192 \cdot \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^3} = 64\sqrt{3} \cdot \frac{-\frac{2}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^3} < 0 \;\Rightarrow\; \underline{\textit{Máximo relativo para } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

$$f'''\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -192 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^3} = -64\sqrt{3} \cdot \frac{-\frac{2}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^3} > 0 \;\Rightarrow\; \underline{\textit{Mínimo relativo para } x = \frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

El valor de la pendiente es $m = f'\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -16 \cdot \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} = 16 \cdot \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{16}{9}} = \underline{3\sqrt{3} = m}$

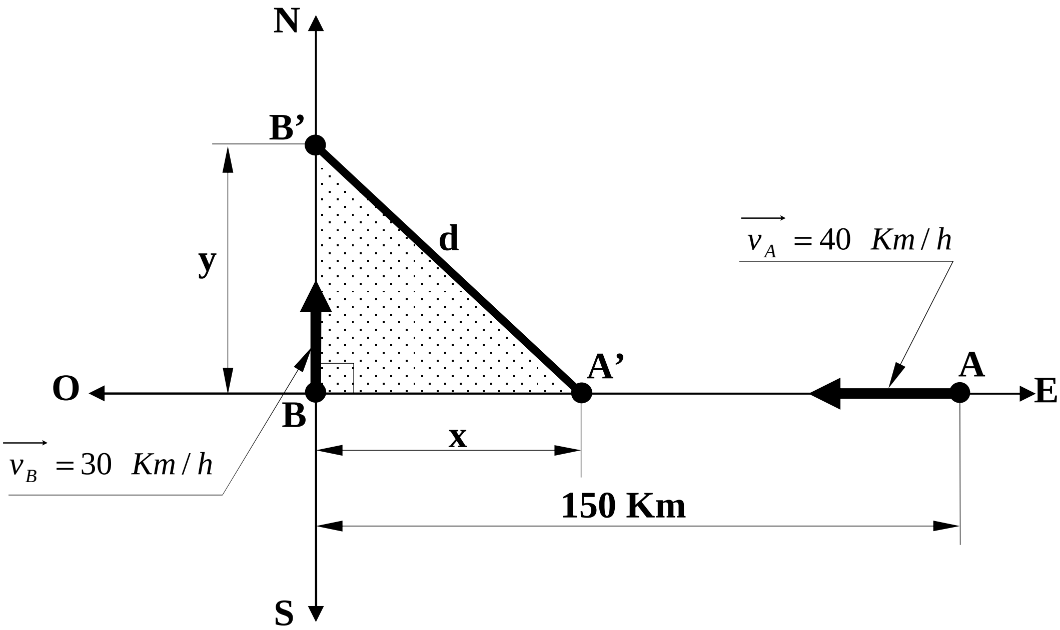
$$\underline{\underline{\textit{La pendiente máxima es } m = 3\sqrt{3}}}$$

****

BLOQUE 4.- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

1º) A las 7 de la mañana, una lancha A está situada a 150 Km al este de otra lancha B. La lancha A navega hacia el oeste a una velocidad constante de 40 Km/h y la lancha B se dirige hacia el norte a 30 Km/h. Si se mantienen estos rumbos, averiguar razonadamente a qué hora estarán ambas lanchas a distancia mínima.

La representación gráfica de la situación se expresa en el esquema, en el cual, los puntos A' y B' representan los puntos que ocuparán los puntos A y B, respectivamente, cuando halla transcurrido un tiempo t desde las 7 de la mañana.



La distancia a que se encuentran después de transcurrido un tiempo de t horas se puede obtener aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo BB'A', siendo x = 150 – 40 · t e y = 30 · t:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(150 - 40t)^2 + (30t)^2} = \sqrt{22500 - 12000t + 1600t^2 + 900t^2} =$$

$$= \sqrt{2500t^2 - 12000t + 22500} = \underline{10\sqrt{25t^2 - 120t + 225} = d}$$

Para que la distancia sea mínima es necesario que se anule su derivada:

$$d' = 10 \cdot \frac{50t - 120}{2 \cdot \sqrt{25t^2 - 120t + 225}} = 50 \cdot \frac{5t - 12}{\sqrt{25t^2 - 120t + 225}} = 0 \Rightarrow 5t - 12 = 0 \ ;; \ 5t = 12 \ ;; \ t = \frac{12}{5} =$$

$$= 2'4 \ horas = \underline{2 \ horas \ \ y \ \ 24 \ \ minutos = t}$$

Para justificar que se trata de un mínimo recurrimos a la segunda derivada, constatando que es positiva para el valor que anula la primera derivada:

$$d''=50\cdot\frac{5\cdot\sqrt{25t^2-120t+225}-(5t-12)\cdot\dfrac{50t-120}{2\cdot\sqrt{25t^2-120t+225}}}{25t^2-120t+225}=$$

$$=250\cdot\frac{\sqrt{25t^2-120t+225}-(5t-12)\cdot\dfrac{5t-12}{\sqrt{25t^2-120t+225}}}{25t^2-120t+225}=$$

$$=250\cdot\frac{25t^2-120t+225-(5t-12)^2}{(25t^2-120t+225)\sqrt{25t^2-120t+225}}=250\cdot\frac{25t^2-120t+225-25t^2+120t-144}{(25t^2-120t+225)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=250\cdot\frac{225-144}{(25t^2-120t+225)^{\frac{3}{2}}}=\frac{250\cdot 81}{(25t^2-120t+225)^{\frac{3}{2}}}=\underline{\frac{20250}{(25t^2-120t+225)^{\frac{3}{2}}}=d''}$$

$$d''\left(\tfrac{12}{5}\right)=\frac{250\cdot 81}{\left[25\cdot\left(\dfrac{12}{5}\right)^2-120\cdot\dfrac{12}{5}+225\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{250\cdot 81}{(144-288+225)^{\frac{3}{2}}}=\frac{250\cdot 81}{81^{\frac{3}{2}}}=\frac{250}{\sqrt{81}}=\frac{250}{9}>0\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ <u>*Mínimo, como queríamos justificar.*</u>

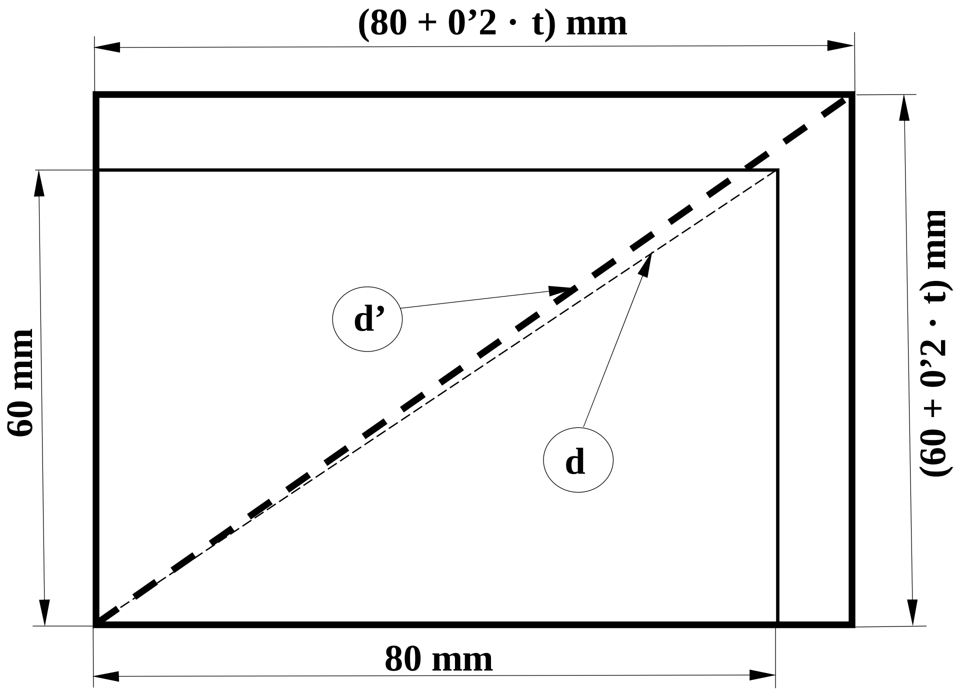
7 horas + 2 horas y 24 minutos = 9 horas y 24 minutos.

<u>Las lanchas están a distancia mínima a las 9 horas y 24 minutos.</u>

****

2º) Una lámina metálica rectangular se dilata uniformemente por calentamiento, aumentando su base y su altura 0'2 mm por minuto. Averiguar la velocidad de crecimiento de la diagonal de dicha lámina cuando la base y la altura de la lámina miden, respectivamente, 8 y 6 cm.

La situación se refleja en el gráfico adjunto.



La longitud de la diagonal resultante d' en función del tiempo tiene la siguiente expresión:

$$d' = \sqrt{(80 + 0'2 \cdot t)^2 + (60 + 0'2 \cdot t)^2} = \sqrt{6400 + 32t + 0'04t^2 + 3600 + 24t + 0'0t^2} =$$

$$= \sqrt{0'08t^2 + 56t + 10000}$$

La velocidad de crecimiento de la diagonal es la derivada de la longitud con respecto al tiempo:

$$v_{d'} = d'(t) = \frac{0'16t + 56}{2 \cdot \sqrt{0'08t^2 + 56t + 10000}} = \underline{\frac{0'08t + 28}{\sqrt{0'08t^2 + 56t + 10000}} = v_{d'}}.$$

Considerando el tiempo t = 0 las dimensiones son las indicadas y la velocidad es:

$$v = v_{(0)} = \frac{28}{\sqrt{10000}} = \frac{28}{100} = \underline{\underline{0'28\ mm/\min = v}}$$

****