# PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

# UNIVERSIDAD DE VALENCIA

# JUNIO – 2006

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II          Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen, teniéndose que hacer 2 de los 3 primeros ejercicios del repertorio elegido.
Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2’5 puntos como máximo.
Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas.

REPERTORIO A

1º) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y - 3z = \alpha \\ 2x + 6y - 11z = 2 \\ x - 2y + 7z = 1 \end{cases}$, se pide:

a ) Determinar razonadamente el valor de $\alpha$ para el cual el sistema es compatible.

b ) Para el valor obtenido de $\alpha$ en el apartado a), calcular el conjunto de soluciones del sistema.

c ) Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las tres ecuaciones del sistema, en función de los valores de $\alpha$.

----------

a )

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 42 + 12 - 22 + 18 - 22 - 28 = 72 - 72 = 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M = 2}$$

Para que el sistema sea compatible determinado es necesario, según el Teorema de Rouché-Fröbenius, que el rango de la matriz ampliada sea también dos:

$$Rango\ \ de\ \ M' \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6-4\alpha+4-6\alpha+4-4 = 10-10\alpha = 0 \\ \\ \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \begin{vmatrix} 1 & -3 & \alpha \\ 2 & -11 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -11+14\alpha-6+11\alpha-14+6 = 25\alpha-25 = 0 \\ \\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \begin{vmatrix} 2 & -3 & \alpha \\ 6 & -11 & 2 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -22+42\alpha+12-22\alpha-28+18 = 20\alpha-20 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\alpha = 1}$$

$$\underline{Para\ \ \alpha = 1 \Rightarrow Rango\ \ M\ = Rango\ \ M' = 2 < n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Indeterminado}$$

Para $\alpha = 1$ el sistema resulta $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 2x+6y-11z=2 \\ x-2y+7z=1 \end{cases}$. Despreciando una de las ecuaciones (segunda) y parametrizando una de las incógnitas (z), resulta:

$$\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ x-2y+7z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=1+3\lambda \\ x-2y=1-7\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 2-4\lambda \Rightarrow \underline{x = 1-2\lambda}$$

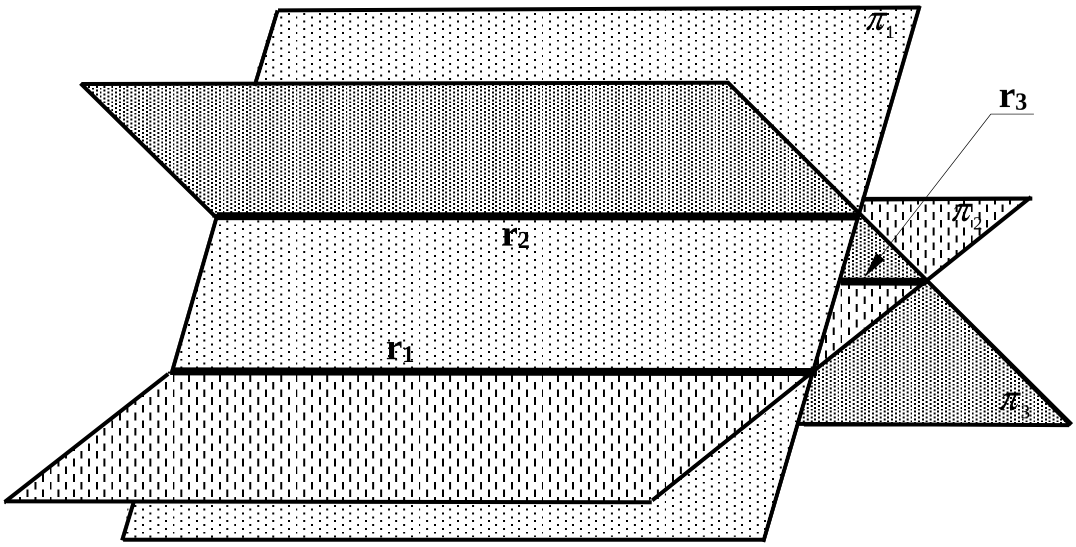
$$\left.\begin{array}{r} x+2y=1+3\lambda \\ -x+2y=-1+7\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 4y = 10\lambda \Rightarrow \underline{y = \frac{5}{2}\lambda}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x = 1-2\lambda \\ y = \frac{5}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} ,\ \ \forall \lambda \in R}}$$

c )

Para $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado, lo que significa que los tres planos tienen puntos en común. Como el rango de ambas matrices es dos y el número de incógnitas es tres, el grado de libertad es uno, lo cual significa que los tres planos tienen una recta en común sin coincidir ninguno de los planos.

Para $\alpha \neq 1$ el sistema es incompatible, lo que significa que los tres planos no tienen puntos en común. Se trata de tres planos que se cortan dos a dos determinando tres rectas paralelas, como se indica en el gráfico siguiente.




**********

2º) En el espacio se consideran la recta r intersección de los planos de ecuaciones implícitas $\pi_1 \equiv x+y-z=5$ $y$ $\pi_2 \equiv 2x+y-2z=2$ y la recta s que pasa por los puntos $A(3,\ 10,\ 5)$ y $B(5,\ 12,\ 6)$, se pide:

a ) Calcular las ecuaciones paramétricas de las rectas r y s.

b ) Calcular el punto H intersección de las rectas r y s y el ángulo que forman r y s.

c ) Calcular los puntos M y N de la recta r para los cuales el área de cada uno de los triángulos de vértices ABM y ABN es de 3 unidades de área.

----------

a )

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=5 \\ 2x+y-2z=2 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=5+\lambda \\ 2x+y=2+2\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-y=-5-\lambda \\ 2x+y=2+2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x=-3+\lambda}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y=10+2\lambda \\ -2x-y=-2-2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=8} \Rightarrow \underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=8 \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

Un vector director de s es $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B-A = (5,\ 12,\ 6)-(3,\ 10,\ 5) = (2,\ 2,\ 1)$.

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{\underline{s \equiv \begin{cases} x=5+2\mu \\ y=12+2\mu \\ z=6+\mu \end{cases}}}$ .

b )

Un punto genérico de cada una de las rectas son: $\begin{cases} P \in r \equiv (-3+\lambda,\ 8,\ \lambda) \\ Q \in s \equiv (5+2\mu,\ 12+2\mu,\ 6+\mu) \end{cases}$

El punto de intersección es tal que $H \equiv P \equiv Q \Rightarrow \begin{cases} -3+\lambda=5+2\mu \\ 8=12+2\mu \\ \lambda=6+\mu \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu=-2 \\ \\ \lambda=4 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\underline{\underline{H(1,\ 8,\ 4)}}$$

El ángulo que forman las rectas r y s es el mismo que forman sus vectores directores. Un vector director de s es $\overrightarrow{u} = (2,\ 2,\ 1)$.

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|} = \frac{(2,\ 2,\ 1)\cdot(1,\ 0,\ 1)}{\sqrt{2^2+2^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+0^2+1^2}} =$$

$$= \frac{2+0+1}{\sqrt{4+4+1} \cdot \sqrt{1+0+1}} = \frac{3}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 45^{\circ}}}$$

c )

Considerando como base de los triángulos el segmento $\overline{AB}$ y sabiendo que el área de los triángulos es 3, las alturas de los triángulos serían:

$$\overline{AB} = \left| \overrightarrow{v} \right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = \underline{3\ u = \overline{AB}}.$$

$$S = \frac{base \cdot altura}{2} \Rightarrow 3 = \frac{\overline{PQ} \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot h}{2} \Rightarrow \underline{h = 2\ u}.$$

Los puntos M y N de la recta r son los que distan dos unidades de la recta s. Los puntos M y N, por pertenecer a r, tienen por coordenadas $P(-3+\lambda,\ 8,\ \lambda)$.

La distancia de un punto a una recta viene dada por la fórmula $d(P,\ s) = \frac{\left| \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{u} \right|}{\left| \overrightarrow{u} \right|}$, siendo A(3, 10, 5) un punto cualquiera de la recta s y $\overrightarrow{u}$ un vector director de la recta s.

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (-3+\lambda,\ 8,\ \lambda) - (3,\ 10,\ 5) = (\lambda - 6,\ -2,\ \lambda - 5).$$

$$d(P,\ s) = \frac{\left| \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{u} \right|}{\left| \overrightarrow{u} \right|} = 2 = \frac{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda - 6 & -2 & \lambda - 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} \ ;;$$

$$2 = \frac{\left| -2i + 2(\lambda - 5)j + 2(\lambda - 6)k + 4k - 2(\lambda - 5)i - (\lambda - 6)j \right|}{\sqrt{4+4+1}} \ ;;$$

$$2 = \frac{\left| (-2 - 2\lambda + 10)i + (2\lambda - 10 - \lambda + 6)j + (2\lambda - 12 + 4)k \right|}{\sqrt{9}} \ ;;$$

$$6 = \left| (8 - 2\lambda)i + (\lambda - 4)j + (2\lambda - 8)k \right| \ ;;\ 6 = \sqrt{(8 - 2\lambda)^2 + (\lambda - 4)^2 + (2\lambda - 8)^2} \ ;;$$

$$36 = 64 - 32\lambda + 4\lambda^2 + \lambda^2 - 8\lambda + 16 + 4\lambda^2 - 32\lambda + 64 \ ;;\ 36 = 9\lambda^2 - 72\lambda + 144 \ ;;$$

$$9\lambda^2 - 72\lambda + 108 = 0 \ ;;\ \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0 \ ;;\ \lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 6} \ ;;\ \underline{\lambda_2 = 2}$$

$$P(-3+\lambda,\ 8,\ \lambda) \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 6 \rightarrow \underline{\underline{M(3,\ 8,\ 6)}} \\ \\ \lambda = 2 \rightarrow \underline{\underline{N(-1,\ 8,\ 2)}} \end{cases}$$

**********

3º) a ) Dibuja razonadamente la gráfica de la función $g(x)=x^2-4$, cuando $-1\leq x\leq 4$.

b ) Obtén razonadamente los valores máximo y mínimo absolutos de la siguiente función $f(x)=\left|x^2-4\right|$ en el intervalo [-1, 4].

c ) Calcula el área plana limitada por la función f(x) y las rectas x = -1, x = 4 e y = 0.

----------

a )

La función g(x) es polinómica por lo cual su dominio es R. Se trata de una parábola simétrica con respecto al eje de ordenadas por ser $g(x)=g(-x)$.

Los cortes con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ \ OX \Rightarrow y=0\ \ ;;\ \ x^2-4=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=2 \rightarrow \underline{A(2,\ 0)} \\ x_2=-2 \rightarrow \underline{B(-2,\ 0)} \end{cases}$$

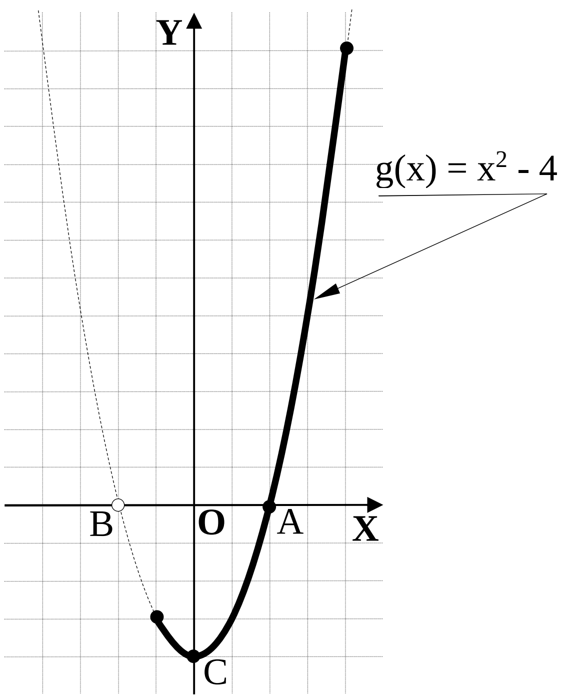
$$Eje\ \ OY \Rightarrow x=0\ \ ;;\ \ y=-4 \rightarrow \underline{C(0,\ -4)}$$

La función g(x) es convexa $(\cup)$ y su punto mínimo es el siguiente:

$$g'(x)=2x\ \ ;;\ \ g'(x)=0 \Rightarrow 2x=0\ \ ;;\ \ x=0$$

$$g''(x)=2>0 \Rightarrow Mínimo\ \ para\ \ x=0\ \Rightarrow\ \underline{Mín.: C(0,\ -4)}$$

Teniendo en cuenta que $g(-1)=-3\ \ y\ \ g(4)=12$, la representación gráfica de la función g(x) es la indicada en la siguiente figura.



b )

Con objeto de facilitar la representación, la función $f(x) = \left| x^2 - 4 \right|$ se puede redefinir de la forma $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & si \ -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & si \ x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \end{cases}$.

El dominio de f(x) es $[-1, 4]$ y, teniendo en cuenta que $f(4) = \left| 4^2 - 4 \right| = 12$, el recorrido es $[0, 12)$.

Como quiera que la función $f(x) \ge 0, \ \forall x \in R$, los mínimos absolutos son los puntos de la función que pertenecen al eje de abscisas: $f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow \notin D(f) \\ x_2 = 2 \rightarrow \underline{\underline{A(2, 0)}} \end{cases}$.

El máximo absoluto de la función se produce para x = 4 y es $\underline{\underline{Q(4, 12)}}$.

Existe un máximo relativo para x = 0, por ser:

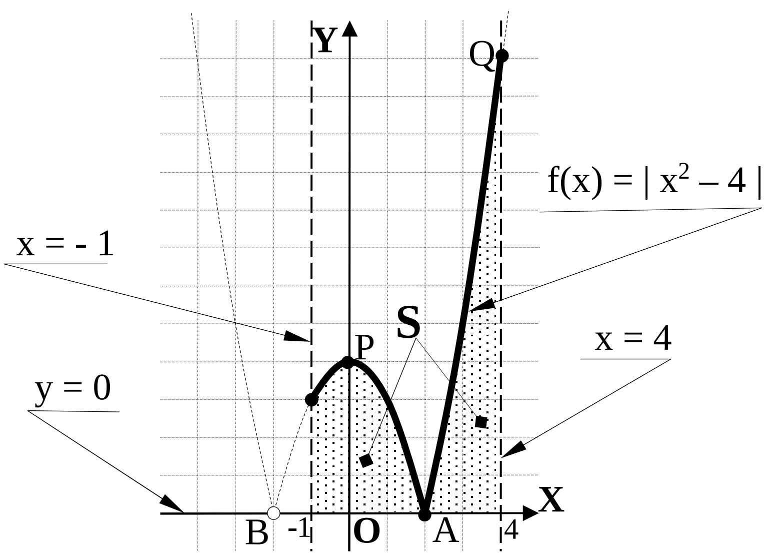
$$f'(x) = \begin{cases} -2x & si \ -2 \le x \le 2 \\ 2x & si \ x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \underline{x = 0}$$

La función tiene un máximo o un mínimo relativo en el intervalo $-2 \le x \le 2$.

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & si \ -2 \le x \le 2 \\ 2 & si \ x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \end{cases} \Rightarrow f''(x) < 0 \ \ en \ -2 \le x \le 2 \Rightarrow \underline{Máximo \ \ relativo}$$

$$f(0) = \left| 0^2 - 4 \right| = 4 \Rightarrow \underline{\underline{Máx. \ relativo: \ P(4, 0)}}$$

La representación gráfica de la función es la de la figura siguiente:



c )

Teniendo en cuenta lo anterior y de la observación de la figura se deduce que la superficie pedida es la siguiente:

$$S=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+4\right)\cdot dx+\int_{2}^{4}\left(x^2-4\right)\cdot dx=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{2}^{4}=$$

$$=\left(-\frac{2^3}{3}+4\cdot 2\right)-\left[-\frac{(-1)^3}{3}+4\cdot(-1)\right]+\left(\frac{4^3}{3}-4\cdot 4\right)-\left(\frac{2^3}{3}-4\cdot 2\right)=$$

$$=-\frac{8}{3}+8-\frac{1}{3}+4+\frac{64}{3}-16-\frac{8}{3}+8=4+\frac{47}{3}=\underline{\underline{\frac{59}{3}\ u^2=S}}$$

**********

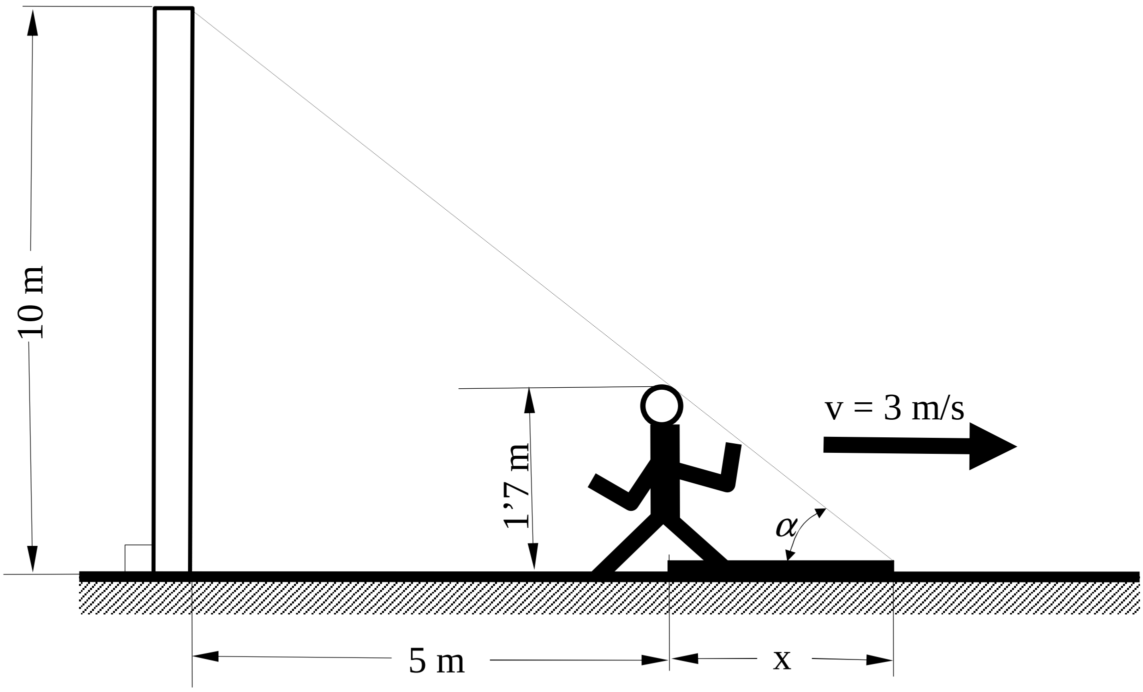
4º) Una persona camina a la velocidad constante de 3 m/s y se aleja horizontalmente en línea recta desde la base de un farol de foco luminoso del que se encuentra a 10 m de altura. Sabiendo que la persona tiene 1'70 m, calcula:

a ) La longitud de la sombra cuando la persona se encuentra a 5 m de la base del farol.

b ) La velocidad de crecimiento de la sombra a los t segundos de empezar a caminar.

----------

a )




$$tag\ \alpha = \frac{10}{5+x} = \frac{1'7}{x} \Rightarrow 10x = 8'5 + 1'7x\ ;;\ 10x - 1'7x = 8'5\ ;;\ 8'3x = 8'5\ ;;\ x = \frac{8'5}{8'3} = \underline{1'02 = x}$$

La longitud de la sombra es de 1'02 metros.

b )

Siendo la velocidad de la persona de 3 m/s, al cabo de un tiempo de t segundos, se encuentra a una distancia del foco de 3t metros y la longitud de la sombra x, en el instante t es: $tag\ \alpha = \frac{10}{3t} = \frac{1'7}{x} \Rightarrow 10x = 5'1t\ ;;\ x = 0'51t$.

Como la velocidad instantánea es la derivada del espacio con respecto al tiempo, será:

$$\underline{\underline{v = d'(t) = 0'51\ m/s}}$$

**********

REPERTORIO B

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $y$ $T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a ) Probar que la matriz T tiene matriz inversa y calcular dicha matriz inversa.

b ) Dada la ecuación con matriz incógnita B, A = $T^{-1}$BT, calcular el determinante de B.

c ) Obtener los elementos de la matriz B considerada en el apartado b).

----------

a )

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|T| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 2 - 4 + 3 + 4 + 4 = -12 + 11 = -1 \neq 0$$

T es inversible, como queríamos probar.

$$|T| = -1 \;;;\; T^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; Adj\left(A^T\right) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}}$$

b )

Teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices, también se podía hacer el ejercicio de ésta forma:

$$B = T \cdot A \cdot T^{-1} \Rightarrow |B| = |T| \cdot |A| \cdot |T^{-1}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-6-2-4+3+4+4) \cdot (-6-4-4+2+8+6) \cdot (-2+2-1) =$$

$$= (11-12) \cdot (16-14) \cdot (-1) = -1 \cdot 2 \cdot (-1) = \underline{\underline{2 = |\,B\,|}}$$

c )

$A = T^{-1} \cdot B \cdot T \Rightarrow$ Multiplicando por la izquierda por T y por la derecha por $T^{-1}$, resulta:

$$T \cdot A \cdot T^{-1} = T \cdot T^{-1} \cdot B \cdot T \cdot T^{-1} = I \cdot B \cdot I = \underline{B = T \cdot A \cdot T^{-1}}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4-4+2 & 4-4+4 & 2-4+3 \\ -2+3-2 & -2+3-4 & -1+3-3 \\ 2-2+2 & 2-2+4 & 1-2+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+0-1 & 4-4+0 & 2-4+2 \\ -1-0+1 & -2+3-0 & -1+3-2 \\ 2+0-2 & 4-4+0 & 2-4+4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B}}$$

**********

2º) Dados los puntos A(4, -4, 9), B(2, 0, 5), C(4, 2, 6), L(1, 1, 4), M(0, 2, 3) y N(3, 0, 5), se pide:

a ) Calcular la distancia d del punto C al punto medio del segmento de extremos A y B y el área S del triángulo de vértices ABC.

b ) Calcular la ecuación implícita del plano $\pi$ que pasa por los puntos A, B y C y del plano $\pi'$ que pasa por los puntos L, M y N.

c ) Calcular unas ecuaciones paramétricas de la recta r intersección de los planos $\pi$ y $\pi'$ y el ángulo $\alpha$ que determinan los planos $\pi$ y $\pi'$.

----------

a )

El punto medio del segmento de extremos A(4, -4, 9), B(2, 0, 5) es M(3, -2, 7).

La distancia d del punto C(4, 2, 6) al punto M es la siguiente:

$$d = \overline{MC} = \sqrt{(4-3)^2 + (2+2)^2 + (6-7)^2} = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = \underline{\underline{3\sqrt{2}\ u = d}}$$

Para hallar el área del triángulo ABC consideramos como base, por ejemplo, el segmento $\overline{AB}$.

La recta r que contiene al segmento $\overline{AB}$ tiene el siguiente vector director: $\vec{v} = \overline{AB} = B - A = (2,\ 0,\ 5) - (4,\ -4,\ 9) = (-2,\ 4,\ -4)$.

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6\ u = \overline{AB}.$$

La altura del triángulo es la distancia del punto C a la recta r.

La distancia de un punto a una recta viene dada por la fórmula $d(C,\ r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AC} \wedge \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$,

siendo A(4, -4, 9) un punto cualquiera de la recta r y $\vec{v}$ un vector director de la recta r.

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (4,\ 2,\ 6) - (4,\ -4,\ 9) = (0,\ 6,\ -3).$$

$$h = d(C,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{AC} \wedge \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 6 & -3 \\ -2 & 4 & -4 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{\left|-24i + 6j + 12k + 12i\right|}{\sqrt{4+16+16}} =$$

$$= \frac{\left| -12i + 6j + 12k \right|}{\sqrt{36}} = \frac{6 \cdot \left| -2i + j + 2k \right|}{6} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = \underline{3\ u = h}$$

$$S_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = \underline{\underline{9\ u^2 = S_{ABC}}}$$

b )

Los puntos A(4, -4, 9), B(2, 0, 5) y C(4, 2, 6) determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC} = (0,\ 6,\ -3) \text{ y } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (-2,\ 4,\ -4).$$

La expresión general del plano $\pi$ es la siguiente:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y+4 & z-9 \\ 0 & 6 & -3 \\ -2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -24(x-4) + 6(y+4) + 12(z-9) + 12(x-4) = 0\ ;;$$

$$-12(x-4) + 6(y+4) + 12(z-9) = 0\ ;;\ -2(x-4) + (y+4) + 2(z-9) = 0\ ;;$$

$$-2x + 8 + y + 4 + 2z - 18 = 0\ ;;\ \underline{\underline{\pi \equiv 2x - y - 2z + 6 = 0}}$$

Los puntos L(1, 1, 4), M(0, 2, 3) y N(3, 0, 5) determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{LM} = M - L = (0,\ 2,\ 3) - (1,\ 1,\ 4) = (-1,\ 1,\ -1)\ \ y$$

$$\overrightarrow{z} = \overrightarrow{LN} = N - L = (3,\ 0,\ 5) - (1,\ 1,\ 4) = (2,\ -1,\ 1)$$

La expresión general del plano $\pi'$ es la siguiente:

$$\pi'\left(L;\ \overrightarrow{w},\ \overrightarrow{z}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;;$$

$$(x-1) - 2(y-1) + (z-4) - 2(z-4) - (x-1) + (y-1) = 0\ ;;\ -(y-1) - (z-4) = 0\ ;;$$

$$y - 1 + z - 4 = 0\ ;;\ \underline{\underline{\pi' \equiv y + z - 5 = 0}}$$

c )

La expresión de r por unas ecuaciones implícitas es $r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 6 = 0 \\ y + z - 5 = 0 \end{cases}$.

Parametrizando $x=\lambda$ se tiene:

$$r \equiv \begin{cases} 2x-y-2z+6=0 \\ y+z-5=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -y-2z=-6-2\lambda \\ y+z=5 \end{array}\right\} \Rightarrow -z=-1-2\lambda \;\;;;\;\; \underline{z=1+2\lambda}$$

$$y=5-z=5-1-2\lambda \;\;;;\;\; \underline{y=4-2\lambda} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=4-2\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}}}$$

El ángulo $\alpha$ que determinan los planos $\pi$ $y$ $\pi'$ es el mismo que forman sus vectores normales, que son $\overrightarrow{n}=(2,\ -1,\ -2)$ $y$ $\overrightarrow{n'}=(0,\ 1,\ 1)$, respectivamente.

Aplicando el producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'} = \left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n'}\right| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'}}{\left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n'}\right|} = \frac{(2,\ -1,\ -2)\cdot(0,\ 1,\ 1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+1^2}} =$$

$$= \frac{0-1-2}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{0+1+1}} = \frac{-3}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = 135^{\circ}}}$$

**********

3º) Dada la función $f(x) = L\,x$ en el intervalo [1, e], siendo e = 2'718281 $\cdots$:

a ) Razona que hay un punto P de la gráfica de y = Lx en que la recta tangente a ésta es paralela a la recta que pasa por los puntos A(1, 0) y B(e, 1).

b ) Obtén el punto P considerado en el apartado a).

c ) Calcula la pendiente de la recta tangente a y = Lx en el punto P hallado en b).

----------

a )

Teniendo en cuenta que la función $f(x) = L\,x$ es continua y derivable en el intervalo considerado y que la pendiente de la recta tangente es la del vector determinado por los puntos A y B, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (e-1,\ 1) \Rightarrow m = \dfrac{1}{e-1}$.

Sabiendo que la pendiente a una recta en un punto es igual que el valor de la derivada de la función en ese punto, es:

$$y = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; m = \frac{1}{x} = \frac{1}{e-1} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{x = e-1 \in [1,\ e]}}$$

b )

$$y_{(e-1)} = L(e-1) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P[e-1,\ L(e-1)]}}$$

c )

El valor de la pendiente es $\underline{\underline{m = \dfrac{1}{e-1}}}$.

**********

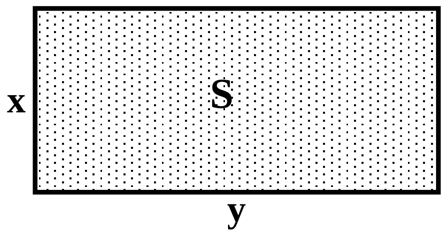
4º) El coste del marco rectangular es de 12’5 euros por metro lineal de los lados verticales y de 8 euros por metro lineal de los lados horizontales.

a ) Calcula razonadamente las dimensiones que ha de tener el marco de un cuadro de un metro cuadrado de superficie para que resulte lo más económico posible.

b ) Calcular además el coste de este marco más económico posible considerado en a).

----------

a )




$$S = x \cdot y = 1 \;;\; \underline{y = \frac{1}{x}}$$

$$Coste = C(x) = 2\,x \cdot 12'5 + 2\,y \cdot 8 = \underline{25x + 16y = C}$$

Sustituyendo el valor de y:

$$Coste = C(x) = 25x + \frac{16}{x} = \underline{\frac{25x^2 + 16}{x} = C(x)}.$$

Para que el coste sea mínimo, su derivada tiene que ser cero:

$$C'(x) = \frac{50x \cdot x - 1 \cdot \left(25x^2 + 16\right)}{x^2} = \frac{50x^2 - 25x^2 - 16}{x^2} = \underline{\frac{25x^2 - 16}{x^2} = C'(x)}$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 25x^2 - 16 = 0 \;;\; x^2 = \frac{16}{25} \;;\; x = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5} \;\; \left(-\frac{4}{5} \;\; carece \;\; de \;\; sentido\right) \;;\; \underline{x = \frac{4}{5}}$$

$$\underline{\underline{Las \;\; \text{dim}ensiones \;\; del \;\; cuadro \;\; deben \;\; ser \;\; de \;\; 80 \; cm \;\; de \;\; base \;\; por \;\; 125 \;\; cm \;\; de \;\; alto.}}$$

Justificación de que se trata de un mínimo:

$$C''(x) = \frac{50x \cdot x^2 - 2x \cdot \left(25x^2 - 16\right)}{x^4} = \frac{50x^2 - 50x^2 + 32}{x^3} = \underline{\frac{32}{x^3} = C''(x)}$$

$$C''\left(\tfrac{4}{5}\right) = \frac{16}{\left(\tfrac{4}{5}\right)^3} > 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Mínimo, \;\; c.q.j.}}$$

b )

El coste es: $Coste = 25x + 16y = 25 \cdot \frac{4}{5} + 16 \cdot \frac{5}{4} = 20 + 20 = \underline{\underline{40 \;\; euros = Coste}}$

**********