PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2005

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen, teniéndose que hacer 2 de los 3 primeros ejercicios del repertorio elegido.
Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2'5 puntos como máximo.
Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas.

REPERTORIO A

1º) Calcular los valores $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\ e\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$ que satisfacen las siguientes ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 2AX-3AY=B \\ AX-AY=C \end{array}\right\},\ siendo:$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}.$$

$$\left.\begin{array}{r} 2AX-3AY=B \\ AX-AY=C \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2AX-3AY=B \\ -2AX+2AY=-2C \end{array}\right\} \Rightarrow -AY=B-2C\ ;;\ AY=2C-B\ ;;$$

$$A^{-1}\cdot A\cdot Y=A^{-1}\cdot(2C-B)\ ;;\ I\cdot Y=A^{-1}\cdot(2C-B)\ ;;\ \underline{Y=A^{-1}\cdot(2C-B)}$$

$$2C-B=2\cdot\begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -34 & -60 \\ 20 & 36 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 18 & 0 \\ -11 & -1 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} -16 & -60 \\ 9 & 35 \end{pmatrix}}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\ ;;\ |A|=\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=6-5=1\ ;;\ A^t=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Adj.\ A^t=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow \underline{A^{-1}=\frac{Adj.\ A^t}{|A|}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$Y=A^{-1}\cdot(2C-B)=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -16 & -60 \\ 9 & 35 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -48+45 & -180+175 \\ -16+18 & -60+70 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}=Y}}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2AX-3AY=B \\ AX-AY=C \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -2AX+3AY=-B \\ 3AX-3AY=3C \end{array}\right\} \Rightarrow AX=3C-B \;;;$$

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(3C-B)\;;;\; I\cdot X=A^{-1}\cdot(3C-B)\;;;\; \underline{X=A^{-1}\cdot(3C-B)}$$

$$3C-B=3\cdot\begin{pmatrix}-17 & -30\\ 10 & 18\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-18 & 0\\ 11 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-51 & -90\\ 30 & 54\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}18 & 0\\ -11 & -1\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}-33 & -90\\ 19 & 53\end{pmatrix}}$$

$$X=A^{-1}\cdot(3C-B)=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-33 & -90\\ 19 & 53\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-99+95 & -270+265\\ -33+38 & -90+106\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 5 & 16\end{pmatrix}=X}}$$

****

2º) Se consideran el plano $\pi \equiv y+z-12m=0$, siendo m un parámetro real, y las rectas de ecuaciones $u \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$, $v \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=2z \end{cases}$ y $w \equiv \begin{cases} x=3 \\ y=3z \end{cases}$. Sean A, B y C los puntos de intersección de π con u, v y w, respectivamente.

a) Calcular las coordenadas de A, B y C en función de m.

b) Hallar los valores de m para los que el área del triángulo ABC es 1 unidad cuadrada.

----

a)

$$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases} \\ \pi \equiv y+z-12m=0 \end{array} \right\} \Rightarrow y+y-12m=0 \;;\; 2y-12m=0 \;;\; y-6m=0 \;;\; \underline{y=6m}$$

$$z=y=\underline{6m=z} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A(1,\ 6m,\ 6m)}}$$

$$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=2z \end{cases} \\ \pi \equiv y+z-12m=0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2z+z-12m=0 \;;\; 3z-12m=0 \;;\; z-4m=0 \;;\; \underline{z=4m}$$

$$y=2z=\underline{8m=y} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{B(2,\ 8m,\ 4m)}}$$

$$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} w \equiv \begin{cases} x=3 \\ y=3z \end{cases} \\ \pi \equiv y+z-12m=0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3z+z-12m=0 \;;\; 4z-12m=0 \;;\; z-3m=0 \;;\; \underline{z=3m}$$

$$y=3z=\underline{9m=y} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{C(3,\ 9m,\ 3m)}}$$

b)

El área de un triángulo ABC en función de dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ que lo determinan es: $S=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|$.

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(2,\ 8m,\ 4m)-(1,\ 6m,\ 6m)=\underline{(1,\ 2m,\ -2m)=\overrightarrow{AB}}$$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(3,\ 9m,\ 3m)-(1,\ 6m,\ 6m)=\underline{(2,\ 3m,\ -3m)=\overrightarrow{AC}}$$

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=1 \;;\; \left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 2m & -2m \\ 2 & 3m & -3m \end{matrix}\right\|=2 \;;\; \left|-6m^2i-4mj+3mk-4mk+3mj+6m^2i\right|=2$$

$$\left|-mj-mk\right|=2 \;;\; m\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=2 \;;\; m\sqrt{2}=2 \;;\; 2m^2=4 \;;\; m^2=2 \;;\; \underline{\underline{m=\pm\sqrt{2}}}$$

****

3º) Dadas las curvas $f(x)=(x-1)^3$ *e* $g(x)=5-x^2$ calcular razonadamente:
a) Su punto de corte. b) El área encerrada por ellas y el eje OY.

----

a) $(x-1)^3=5-x^2$;; $x^3-3x^2+3x-1=5-x^2$;; $x^3-2x^2+3x-6=0$

Procediendo por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & & 2 & 0 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

La ecuación resultante, $x^2+3=0$, no tiene soluciones reales, lo que justifica que las curvas tienen un solo punto de corte, que es el siguiente:

$$x=2 \to y=5-2^2=5-4=1 \Rightarrow \underline{\underline{P(2,\ 1)}}$$

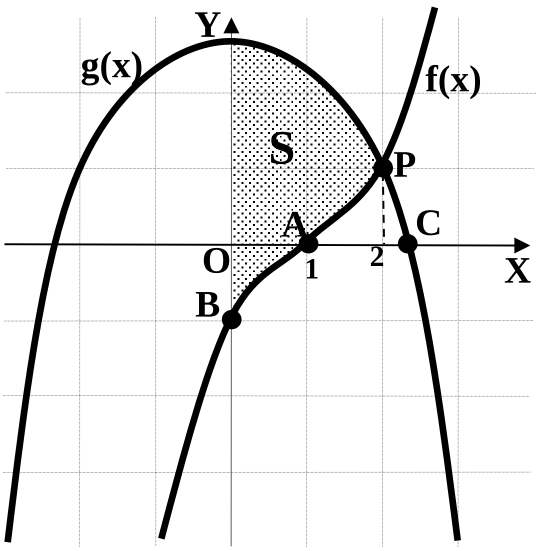
b)

Los puntos de corte de las funciones con los ejes son los siguientes:

$$f(x)=(x-1)^3 \Rightarrow \begin{cases} Eje\ \ X \to y=0 \Rightarrow (x-1)^3=0 \to x=1 \Rightarrow \underline{A(1,\ 0)} \\ Eje\ \ Y \to x=0 \Rightarrow y=(0-1)^3=-1=y \Rightarrow \underline{B(0,\ -1)} \end{cases}$$

$$g(x)=5-x^2 \Rightarrow \begin{cases} Eje\ \ X \to y=0 \Rightarrow 5-x^2=0\ ;;\ x=\pm\sqrt{5} \to \underline{C(\sqrt{5},\ 0)};\ \underline{D(-\sqrt{5},\ 0)} \\ Eje\ \ Y \to x=0 \Rightarrow \underline{y=5} \Rightarrow \underline{E(0,\ 5)} \end{cases}$$

La situación aproximada de la situación es la que indica la figura:



$$S=\int_0^2 g(x)\cdot dx-\int_0^2 f(x)\cdot dx=$$

$$=\int_0^2 (5-x^2)\cdot dx+\int_2^0 (x-1)^3\cdot dx=$$

$$=\underline{\left[5x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2+I=S}$$

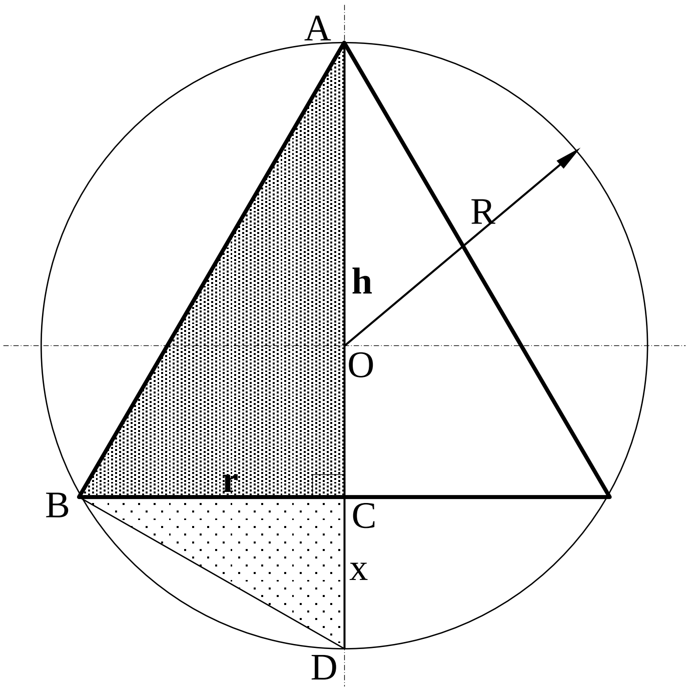
$$I=\int_2^0 (x-1)^3\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x-1=t \\ dx=dt \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} x=0\to t=-1 \\ x=2\to t=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$I=\int_1^{-1} t^3\cdot dt=\left[\frac{t^4}{4}\right]_1^{-1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow S=\left[\left(10-\frac{8}{3}\right)-0\right]=\underline{\underline{\frac{22}{3}\,u^2=S}}$$

****

4º) Probar que el volumen de cualquier cono recto inscrito en una esfera es menor que el 30 por ciento del volumen de la misma.

Una sección plana de la situación se refleja en la figura adjunta.



Los triángulos rectángulos ABC y BCD son semejantes por lados perpendiculares, por lo cual se puede establecer la siguiente relación entre el radio de la esfera (R) y el radio y la altura del cono (r y h):

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{r}{2R-h} \Rightarrow$$

$$\underline{r^2 = h(2R-h)} \quad (1)$$

El volumen de la esfera viene dado por la fórmula $V_e = \frac{4}{3}\pi R^3$.

El 30 % de este volumen es $30\ \%\ de\ V_e = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \underline{\frac{2}{5}\pi R^3}$.

El volumen del cono equivale a un tercio del área de la base por la altura; viene dado por la siguiente fórmula: $V_c = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Sustituyendo el valor de r^2 de la expresión (1) resulta:

$$V_c = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot [h(2R-h)] \cdot h = \underline{\frac{1}{3}\pi h^2 (2R-h) = V_c}$$

El volumen máximo del cono se produce cuando su derivada sea cero:

$$V'_c = \frac{1}{3}\pi \cdot [2h \cdot (2R-h) + h^2 \cdot (-1)] = \frac{1}{3}\pi \cdot (4Rh - 2h^2 - h^2) = \frac{1}{3}\pi \cdot (4Rh - 3h^2) =$$

$$\underline{= \frac{1}{3}\pi h \cdot (4R-3h) = V_c'} \quad \Rightarrow \quad V_c' = 0 \Rightarrow h = 0 \ \ (para \ \ mínimo) \ \ y \ \ 4R - 3h = 0 \ \ ;; \ \ \underline{h = \frac{4R}{3}}$$

Vamos a justificar que se trata de un máximo:

$$V''_c = \frac{1}{3}\pi(4R-6h) \ ;; \ V''_c\left(\tfrac{4R}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(4R - 6\frac{4R}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi(4R-8R) = -\frac{4}{3}\pi R < 0 \Rightarrow \underline{Máx, \ \ c.q.j.}$$

Sustituyendo el valor obtenido de h y r^2, el valor del volumen del cono es:

$$V_c = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot [h(2R-h)] \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot h^2 \cdot (2R-h) = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{4R}{3}\right)^2 \cdot \left(2R - \frac{4R}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{16R^2}{9} \cdot \frac{6R-4R}{3} = \underline{\frac{32}{81}\pi R^3 = V_c} \quad (\textit{máximo})$$

Vamos a comparar el volumen máximo del cono con el 30 % del volumen de la esfera:

$$V_c = \frac{32}{81}\pi R^3 < 30\ \%\ \ de\ \ V_e = \frac{2}{5}\pi R^3 \Rightarrow \text{Equivale a demostrar que } \frac{32}{81} < \frac{2}{5}:$$

$$\text{m.c.m.} = 5 \cdot 81 \quad \Rightarrow \quad \frac{32 \cdot 5}{5 \cdot 81} < \frac{2 \cdot 81}{5 \cdot 81}\ ;;\ 32 \cdot 5 < 2 \cdot 81\ ;;\ 160 < 162 \Rightarrow \underline{\textit{Evidente}}$$

<u>En efecto, el volumen del cono máximo es menor que el 30 % del volumen de la esfera.</u>

****

5º) Cien alumnos prepararon un examen de Matemáticas. Se representa por x el número de problemas hecho por cada alumno en la preparación y por y la calificación obtenida. Sabiendo que las medias aritméticas de esas variables fueron $\overline{x} = 9'2$ *e* $\overline{y} = 7'5$, que el coeficiente de correlación entre esas variables fue 0'7 y que la desviación típica de la variable y fue el doble que la de la variable x, se pide obtener, razonadamente:

a) La ecuación de la recta de regresión de Y sobre X.

b) La calificación que la adecuada recta de regresión predice para un alumno que sólo hizo 6 problemas durante la preparación del examen.

----

a) El coeficiente de correlación viene dado por la expresión: $r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$, siendo S_{xy} la covarianza, S_x la desviación típica de x y S_y la desviación típica de y.

La recta de regresión de Y sobre X es la ecuación: $y - \overline{y} = \frac{S_{xy}}{S_y^2}\left(x - \overline{x}\right)$.

Teniendo en cuenta que $S_y = 2S_x$;; $S_x = \frac{S_y}{2}$, podemos deducir lo siguiente:

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{S_{xy}}{\frac{S_y}{2} \cdot S_y} = \frac{2 \cdot S_{xy}}{S_y^2} \Rightarrow \frac{S_{xy}}{S_y^2} = 2r = 2 \cdot 0'7 = \underline{1'4 = \frac{S_{xy}}{S_y^2}}$$

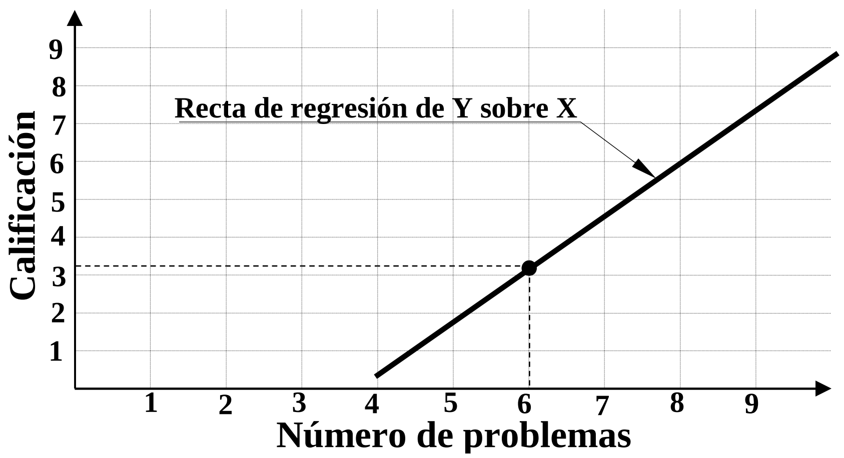
Sustituyendo este valor en la recta de regresión, con el resto de los datos, queda:

$$y - 7'5 = 1'4\left(x - 9'2\right) \;;;\; y - 7'5 = 1'4x - 12'88$$

$$\underline{\underline{\text{Recta de regresión de } Y \text{ sobre } X \Rightarrow y = 1'4x - 5'38}}$$

b)

La representación gráfica de la recta anterior es la siguiente:



Como puede apreciarse por el gráfico, la nota aproximada sería, aproximadamente, de 3'3.

****

REPERTORIO B

1º) El sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+\alpha y+\alpha^2 z=1 \\ x+\alpha y+\alpha z=\alpha \\ x+\alpha^2 y+\alpha^2 z=\alpha^2 \end{array}\right\}$ depende del parámetro α. Discutir para qué valores de α es incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado y resolverlos en los casos compatibles.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, para que un sistema sea incompatible es necesario que los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada sean diferentes.

El rango de M es, en función de α, el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix}=\alpha^2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^2\left(\alpha+\alpha^2+1-\alpha-\alpha-\alpha\right)=\alpha^2\left(\alpha^2-2\alpha+1\right)=$$

$$=\alpha^2\left(\alpha-1\right)^2=0 \Rightarrow \underline{\alpha_1=0} \;;;\; \underline{\alpha_2=1}$$

$$\underline{\underline{Para\ \left\{\begin{array}{l}\alpha\neq 0\\ \alpha\neq 1\end{array}\right\} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Determinado}}$$

Veamos que ocurre con los rangos de M y M’ para los valores de α que hacen que el rango de M sea menor que tres:

$$Para\ \alpha=0\ es\ M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ M=1} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ \alpha=0 \Rightarrow Rango\ M \neq Rango\ M' \Rightarrow Incompatible}}$$

$$Para\ \alpha=1\ es\ M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ M=1} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ M'=1}$$

$$\underline{\underline{Para\ \alpha=1 \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=1<n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Indeterminado}}$$

Resolvemos en los casos de compatibilidad:

Para $\left\{\begin{matrix}\alpha \neq 0\\ \alpha \neq 1\end{matrix}\right\}$, que es compatible determinado, resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & \alpha & \alpha^2\\ \alpha & \alpha & \alpha\\ \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2\end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha-1)^2}=\frac{\alpha\cdot\begin{vmatrix}1 & \alpha & \alpha^2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha-1)^2}=\frac{1\cdot 0}{\alpha(\alpha-1)^2}=\underline{\underline{0=x}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & \alpha^2\\ 1 & \alpha & \alpha\\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2\end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha-1)^2}=\frac{\alpha\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & \alpha\\ 1 & \alpha & 1\\ 1 & \alpha^2 & \alpha\end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha-1)^2}=\frac{\alpha^2+\alpha^3+1-\alpha^2-\alpha^2-\alpha}{\alpha(\alpha-1)^2}=\frac{\alpha^3-\alpha^2-\alpha+1}{\alpha(\alpha-1)^2}=$$

$$=\frac{(\alpha-1)^2(\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)^2}=\underline{\underline{\frac{\alpha+1}{\alpha}=y}}$$

(La expresión $\alpha^3-\alpha^2-\alpha+1$ se ha descompuesto aplicando la Regla de Ruffini)

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & \alpha & 1\\ 1 & \alpha & \alpha\\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2\end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha-1)^2}=\frac{\alpha\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & \alpha\\ 1 & \alpha & \alpha^2\end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha-1)^2}=\frac{\alpha^2+\alpha+\alpha-1-\alpha^2-\alpha^2}{\alpha(\alpha-1)^2}=\frac{-\alpha^2+2\alpha-1}{\alpha(\alpha-1)^2}=$$

$$=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha(\alpha-1)^2}=\underline{\underline{-\frac{1}{\alpha}=z}}$$

Para $\alpha=1$ el sistema se transforma en la ecuación $x+y+z=1$, cuyas soluciones son todos los infinitos puntos del plano que determina. Se trata, pues, de una indeterminación con dos grados de libertad por lo que debemos utilizar dos parámetros.

$$\text{Haciendo } \left.\begin{matrix}\underline{y=\lambda}\\ \underline{z=\mu}\end{matrix}\right\}\rightarrow \underline{x=1-\lambda-\mu} \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Solución}: \left\{\begin{matrix}x=1-\lambda-\mu\\ y=\lambda\\ z=\mu\end{matrix}\right. ,\ \forall\lambda,\ \mu\in R}}$$

Dando valores a λ y μ se obtienen las infinitas soluciones, por ejemplo:

$$\underline{\underline{\left.\begin{matrix}\lambda=0\\ \mu=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}x=1\\ y=0\\ z=0\end{matrix}\right.}} \;;;\; \underline{\underline{\left.\begin{matrix}\lambda=1\\ \mu=2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}x=-2\\ y=1\\ z=2\end{matrix}\right.}} \;;;\; \underline{\underline{\left.\begin{matrix}\lambda=7\\ \mu=-1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}x=-5\\ y=7\\ z=-1\end{matrix}\right.}} \;\cdots\cdots$$

****

2º) Hallar las ecuaciones de los planos que pasan por el punto P(-7, 2, -3) y tales que las proyecciones perpendiculares del origen sobre dichos planos son puntos de la recta de ecuación $r \equiv (x,\ y,\ z) = (0,\ 4,\ 1) + t(1,\ 0,\ 0)$.

Los planos que se piden son tales que sus vectores normales tienen que tener su principio en el origen de coordenadas y su extremos en un punto de la recta r, es decir, que el vector normal genérico es $\overrightarrow{n} = (t,\ 4,\ 1)$.

El conjunto de planos pedidos tienen por ecuación: $tx + 4y + z + D = 0$.

Como tienen que pasar por el punto P(-7, 2, -3), tienen que satisfacer su ecuación, por tanto tienen que satisfacerse la ecuación para las coordenadas del punto:

$$-7t + 4 \cdot 2 - 3 + D = 0\ \ ;;\ \ -7t + 8 - 3 + D = 0\ \ ;;\ \ \underline{D = 7t - 5}$$

$$\underline{\pi \equiv tx + 4y + z + (7t - 5) = 0,\quad (t \in R)}$$

Los puntos de la recta r son de la forma Q(t, 4, 1) y como el punto P(-7, 2, -3) pertenece al plano pedido, los vectores $\overrightarrow{v} = \overline{PQ}\ \ y\ \ \overrightarrow{n}$ tienen que ser perpendiculares.

$$\overrightarrow{v} = \overline{PQ} = Q - P = (t,\ 4,\ 1) - (-7,\ 2,\ -3) = (t + 7,\ 2,\ 4)$$

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Rightarrow (t + 7,\ 2,\ 4) \cdot (t,\ 4,\ 1) = 0\ \ ;;\ \ t^2 + 7t + 8 + 4 = 0\ \ ;;\ \ t^2 + 7t + 12 = 0$$

$$t = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2} \Rightarrow \underline{t_1 = -3}\ \ ;;\ \ \underline{t_2 = -4}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión de π obtenemos los planos pedisos:

$$\underline{\underline{\pi_1 \equiv -3x + 4y + z - 26 = 0}}\quad y\quad \underline{\underline{\pi_1 \equiv -4x + 4y + z - 33 = 0}}$$

****

3º) Hallar las constantes reales a y b para que $f(x)=\begin{cases} x\,L\,x+a & si \quad x>0 \\ b & si \quad x=0 \\ \dfrac{sen\,(\pi x)}{x} & si \quad x<0 \end{cases}$ sea continua para todo valor real de x.

Para que una función sea continua en un punto tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x\,L\,x+a\right)=0\cdot(-\infty)+a \Rightarrow Ind. \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{L\,x}{\frac{1}{x}}+a\right) \to (L'\,Hopital)$$

$$\to \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right)+\lim_{x\to 0} a = \lim_{x\to 0}(-x)+a=0+a=\underline{a}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{sen(\pi x)}{x}=\frac{0}{0}\to Ind.\to (L'\,Hopital)\to \lim_{x\to 0^+}\frac{\pi\cdot\cos(\pi x)}{1}=\underline{\pi}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x\,L\,x+a\right)=\underline{a} \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{sen(\pi x)}{x}=\underline{\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a=b=\pi}}$$

****

4º) La concentración en sangre de un fármaco después de su toma es la siguiente: $C(t) = 0'29483 \cdot t + 0'04253 \cdot t^2 - 0'00035 \cdot t^3 \quad mg/ml$, donde t es el tiempo transcurrido en minutos. Se pide:

a) Calcular el periodo de tiempo durante el cual el fármaco actúa.

b) Determinar en qué instante la concentración del fármaco es máxima.

----

a)

Basta con saber cuando se anula la acción , C(t) = 0:

$$C(t) = 0'29483 \cdot t + 0'04253 \cdot t^2 - 0'00035 \cdot t^3 = 0 \;\;;;\;\; t\left(29483 + 4253 \cdot t - 35 \cdot t^2\right) = 0$$

La solución t = 0 carece de sentido. Resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$35t^2 - 4253t - 29483 = 0 \;\;;;\;\; t = \frac{4253 \pm \sqrt{18088009 + 4127620}}{70} = \frac{4253 \pm \sqrt{22215629}}{70} =$$

$$= \frac{4253 \pm 4713'35}{70} \Rightarrow \begin{cases} t_2 = 128'10 \\ t_3 = -6'57 \end{cases} \quad \left(La\;\; solución\;\; negativa\;\; carece,\;\; igualmente,\;\; de\;\; sentido\right)$$

<u>El tiempo que dura la acción del medicamento es de 128 minutos</u>

b)

La concentración será máxima cuando la derivada sea cero:

$$C'(t) = 0'295 + 0'085t - 0'001 \cdot t^2 = 0$$

$$t^2 - 85t - 295 = 0 \;\;;;\;\; t = \frac{85 \pm \sqrt{7225 + 1180}}{2} = \frac{85 \pm \sqrt{8405}}{2} = \frac{85 \pm 91'68}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 88'24 \\ t_2 = -3'34 \end{cases}$$

$\left(La\;\; solución\;\; negativa\;\; carece,\;\; igualmente,\;\; de\;\; sentido\right)$

Para justificar que se trata de un máximo recurrimos a la segunda derivada:

$$C''(t) = 0'085 - 0'002 \cdot t \;\;;;\;\; C''(88'24) = 0'085 - 0'002 \cdot 88'24 = 0'085 - 0'17648 < 0 \Rightarrow \underline{Máx}.$$

<u>La máxima concentración se produce a los 88’24 minutos</u>

****

5º) De una urna que contiene 6 bolas blancas y 4 negras se extraen bolas sucesivamente y sin devolución. Obtener razonadamente cuántas bolas hay que sacar para que:

a) La probabilidad de sacar al menos una blanca sea $\frac{29}{30}$.

b) La probabilidad de sacar al menos una blanca sea 1.

----

a)

Sacando una bola: $p(b) = \frac{6}{10} = \underline{\frac{3}{5}}$

Sacando dos bolas, la probabilidad de que al menos una sea blanca es equivalente al suceso contrario de que las dos sean negras:

$$p(b) = 1 - p(nn) = 1 - \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{15} = \underline{\frac{13}{15}}$$

Sacando tres bolas, la probabilidad de que al menos una sea blanca es equivalente al suceso contrario de que las tres sean negras:

$$p(b) = 1 - p(nnn) = 1 - \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{30} = \underline{\frac{29}{30}}$$

Como puede apreciarse, hay que sacar tres bolas.

b)

Para que eso suceda es necesario sacar cinco bolas (puede ocurrir que las cuatro primeras bolas sean las cuatro negras).

****