PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

SEPTIEMBRE – 2005

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen, teniéndose que hacer 2 de los 3 primeros ejercicios del repertorio elegido.
Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2’5 puntos como máximo.
Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas.

REPERTORIO A

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7\\2\\-2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ y $E=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$, calcular razonadamente la matriz $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ que satisface la ecuación $\left(A\cdot B^t+C\right)X=\left(A^t\cdot D\right)E$, donde M^t significa la matriz transpuesta de la matriz M.

$$\left(A\cdot B^t+C\right)X=\left(A^t\cdot D\right)E \Rightarrow \left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&2&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix} \;;;$$

$$\left[\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&4&-4\\21&6&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\left(0+4+6\right)\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix}7&2&-2\\14&5&-4\\21&6&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\left(10\right)\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix} \;;;$$

$$\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&5&-4\\21&6&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\50\\30\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}7x+2y-2z=20\\14x+5y-4z=50\\21x+6y-5z=30\end{array}\right\} \quad \text{Re}\,solviendo\ \ por\ \ Cramer:$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}20 & 2 & -2\\ 50 & 5 & -4\\ 30 & 6 & -5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}7 & 2 & -2\\ 14 & 5 & -4\\ 21 & 6 & -5\end{vmatrix}}=\frac{10\cdot\begin{vmatrix}2 & 2 & -2\\ 5 & 5 & -4\\ 3 & 6 & -5\end{vmatrix}}{7\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ 3 & 6 & -5\end{vmatrix}}=\frac{10\cdot(-50-60-24+30+48+50)}{7\cdot(-25-24-24+30+24+20)}=$$

$$=\frac{10\cdot(-134+128)}{7\cdot(-73+74)}=\frac{10\cdot(-6)}{7\cdot 1}=\underline{\underline{-\frac{60}{7}=x}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}7 & 20 & -2\\ 14 & 50 & -4\\ 21 & 30 & -5\end{vmatrix}}{7}=\frac{-70\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 5 & 4\\ 3 & 3 & 5\end{vmatrix}}{7}=-10\cdot(25+12+24-30-12-20)=\underline{10=y}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}7 & 2 & 20\\ 14 & 5 & 50\\ 21 & 6 & 30\end{vmatrix}}{7}=\frac{70\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 5 & 5\\ 3 & 6 & 3\end{vmatrix}}{7}=10\cdot(15+24+30-30-30-12)=\underline{-30=z}$$

$$\underline{\underline{X=\begin{pmatrix}-\frac{60}{7}\\ 10\\ -30\end{pmatrix}=-\frac{10}{7}\cdot\begin{pmatrix}6\\ -7\\ 21\end{pmatrix}}}$$

****

2º) Un paralelepípedo rectangular (ortoedro) tiene tres de sus aristas sobre las siguientes rectas: $l \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $m \equiv \begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$ y $n \equiv \begin{cases} 2x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$, y uno de sus vértices es el punto $P(12,\ 21,\ -11)$.

Se pide: a) Hallar los vértices restantes. b) Calcular su volumen.

----

a)

Las ecuaciones paramétricas de las tres rectas son:

$$\underline{l \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}} \quad ;; \quad m \equiv \begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow y=\lambda \Rightarrow \underline{m \equiv \begin{cases} x=2\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}} \quad ;;$$

$$n \equiv \begin{cases} 2x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow x=\lambda \Rightarrow \underline{n \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=0 \end{cases}}$$

Los vectores directores de las rectas pueden los siguientes: $\begin{cases} \overrightarrow{v_l}=(0,\ 0,\ 1) \\ \overrightarrow{v_m}=(2,\ 1,\ 0) \\ \overrightarrow{v_n}=(1,\ -2,\ 0) \end{cases}$.

Las tres rectas son perpendiculares entre sí (los productos escalares de los vectores directores son todos nulos) y todas pasan por el origen de coordenadas, lo cual significa que el ortoedro tiene las aristas paralelas a los ejes coordenados y uno de sus vértices es el origen $\underline{\underline{O(0,\ 0,\ 0)}}$.

El punto dado P, no pertenece a ninguno de los tres planos que determinan las tres rectas, tomadas dos a dos, por lo cual podemos asegurar que es el vértice opuesto al origen de coordenadas.

Como se aprecia, la recta l coincide con el eje OZ, por lo cual las coordenadas del vértice A son $\underline{\underline{A(0,\ 0,\ -11)}}$ y las de su vértice opuesto $\underline{\underline{D(12,\ 21,\ -11)}}$.

La recta r que pasa por D y es paralela a n tiene por ecuación:

$r \equiv (x,\ y,\ z)=(12,\ 21,\ 0)+\lambda(1,\ -2,\ 0)$, cuya expresión general es la siguiente:

$$\frac{x-12}{1}=\frac{y-21}{-2} \Rightarrow -2x+24=y-21 \ ;; \ \underline{r \equiv 2x+y-45=0}$$

El punto B es la intersección de las rectas r y m:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv 2x + y - 45 = 0 \\ m \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array}\right\} \rightarrow x = 2y \quad \Rightarrow \; 4y + y - 45 = 0 \;\; ;; \;\; 5y = 45 \;\; ;; \;\; y = 9 \;\; ;; \;\; x = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \underline{\underline{B(18, \; 9, \; 0)}}$$

La recta s que pasa por D y es paralela a n es:

$s \equiv (x, \; y, \; z) = (12, \; 21, \; 0) + \lambda(2, \; 1, \; 0)$, cuya expresión general es la siguiente:

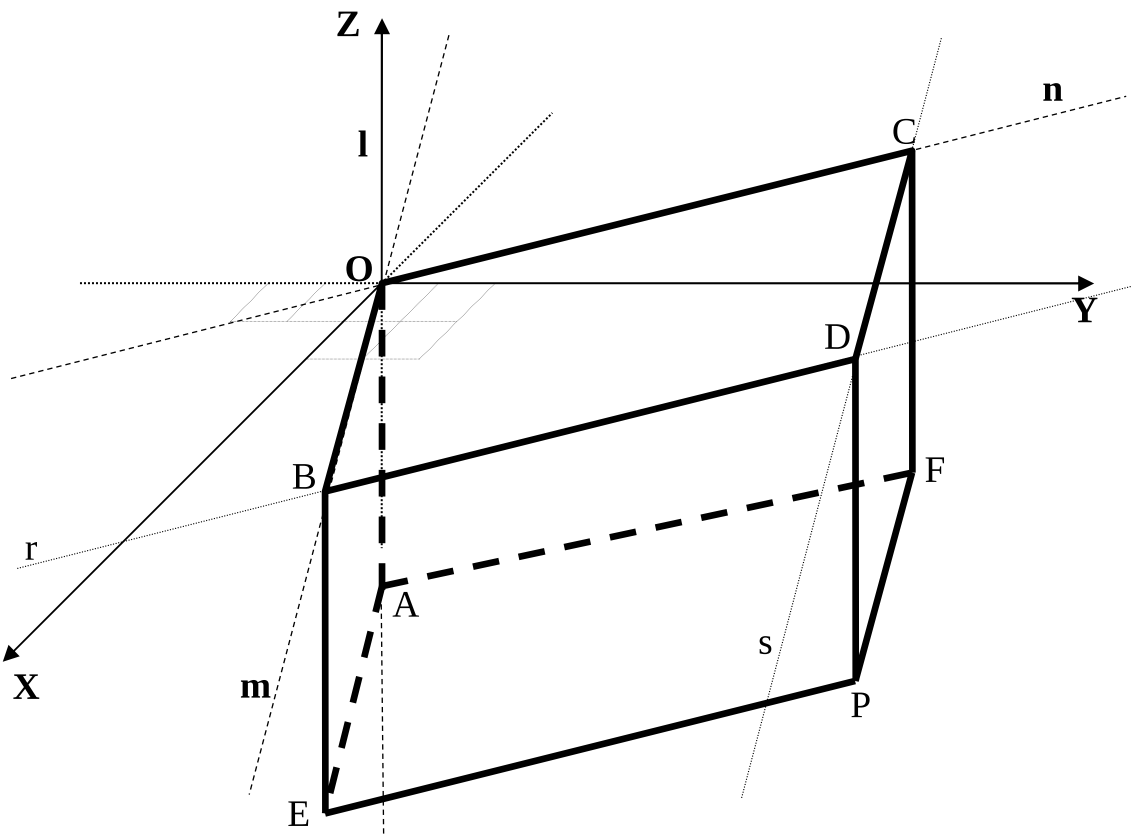
$$\frac{x - 12}{2} = \frac{y - 21}{1} \quad \Rightarrow \quad x - 12 = 2y - 42 \;\; ;; \;\; \underline{s \equiv x - 2y + 30 = 0}$$

El punto C es la intersección de las rectas s y n:

$$\left.\begin{array}{l} s \equiv x - 2y + 30 = 0 \\ n \equiv \begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array}\right\} \rightarrow y = -2x \Rightarrow x + 4x + 30 = 0 \;\; ;; \;\; 5x = -30 \;\; ;; \;\; x = -6 \;\; ;; \;\; y = 12 \;\; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \underline{\underline{C(-6, \; 12, \; 0)}}$$

Con objeto de facilitar la comprensión hacemos un gráfico muy aproximado de la situación.



De la observación del dibujo se deducen: E(18, 9, -11) y F(-6, 12, -11).

b)

Sabiendo que el volumen de un ortoedro es el producto mixto de los tres vectores que lo determinan, es $V=\left[\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}\right)\right]$.

$\overrightarrow{OA}=(0,\ 0,\ -11)$;; $\overrightarrow{OB}=(18,\ 9,\ 0)$ y $\overrightarrow{OC}=(-6,\ 12,\ 0)$.

$$V=\left[\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}\right)\right]=\left\|\begin{matrix}0 & 0 & -11\\ 18 & 9 & 0\\ -6 & 12 & 0\end{matrix}\right\|=\left|-11\cdot 9\cdot 6\right|=\underline{\underline{594\ u^3=V}}$$

****

3º) a) El perímetro de un sector circular de radia r es 4 metros. ¿Cuántos radianes debe medir su ángulo central α para que su área sea máxima?

Nota: Perímetro: $p = 2r + r\alpha.$ $Área:\ S = \frac{1}{2}\alpha r^2.$

b) El área de otro sector circular es $S = 1\ m^2$. ¿Para qué radio es mínimo el perímetro?

----

a)

$$p = 2r + r\alpha. \ ;;\ 4 = 2r + r\alpha \ ;;\ \alpha = \frac{4-2r}{r} = \underline{\frac{2(2-r)}{r} = \alpha}$$

Sustituyendo este valor en la fórmula del área, resulta:

$$Área:\ S = \frac{1}{2}\alpha r^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2(2-r)}{r}\cdot r^2 = (2-r)\cdot r = \underline{2r - r^2 = S}$$

Para que el área sea máxima es necesario que su derivada sea cero:

$$S'(r) = 2 - 2r \ ;;\ S'(r) = 0 \Rightarrow 2 - 2r = 0 \ ;;\ \underline{r = 1}$$

Para justificar que se trata de un máximo tendremos en cuenta que:

$$S''(r) = -2 > 0 \ \Rightarrow\ \underline{máximo,\ c.q.j.}$$

El valor del perímetro se obtiene sustituyendo el valor de r por su valor, 1:

$$\alpha = \frac{4-2r}{r} = \frac{4-2\cdot 1}{1} = \frac{4-2}{1} = \underline{\underline{2\ \ radianes = \alpha}}$$

b)

$$Área:\ S = \frac{1}{2}\alpha r^2 = 1 \ \Rightarrow\ \underline{\alpha = \frac{2}{r^2}}$$

Sustituyendo el valor de α en la fórmula del perímetro:

$$p = 2r + r\alpha. = 2r + r\cdot\frac{2}{r^2} = 2r + \frac{2}{r} = \frac{2r^2+2}{r} = \underline{\frac{2(r^2+1)}{r} = p}$$

Para que el perímetro sea mínimo es necesario que su derivada sea cero:

$$p'(r) = \frac{4r\cdot r - (2r^2+2)\cdot 1}{r^2} = \frac{4r^2 - 2r^2 - 2}{r^2} = \frac{2r^2-2}{r^2} = \underline{\frac{2(r^2-1)}{r^2} = p'(r)}.$$

$$p'(r) = 0 \Rightarrow \frac{2(r^2-1)}{r^2} = 0 \ ;;\ r^2 - 1 = 0 \ ;;\ r = \pm 1 \ \to \underline{r = 1}$$

Para justificar que se trata de un máximo tendremos en cuenta que:

$$p''(r)=\frac{4r\cdot r^2-\left(2r^2-2\right)\cdot 2r}{r^4}=\frac{4r^2-2\left(2r^2-2\right)}{r^3}=\frac{4r^2-4r^2+4}{r^3}=\underline{\frac{4}{r^2}=p''(r)}$$

$$p''(1)=\frac{4}{1^2}=\frac{4}{1}=4>0\ \Rightarrow \underline{\textit{mínimo},\ \ c.q.j.}$$

El valor del ángulo α se obtiene sustituyendo el valor de r por su valor, 1:

$$\alpha=\frac{4-2\cdot 1}{1}=\frac{4-2}{2}=\frac{2}{2}=\underline{1\ \ radián=\alpha}$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula del perímetro queda, finalmente.

$$p=2r+r\alpha=2\cdot 1+1\cdot 2=\underline{4\ \ metros=p}$$

<u>El perímetro es mínimo cuando el radio es de un metro.</u>

****

4º) El caudal de agua (es decir, el volumen por unidad de tiempo) que circula por una tubería cilíndrica es proporcional a la cuarta potencia de su radio. Para abastecer a una población, se han previsto tuberías de cierto radio, pero el fabricante las suministra de un radio que es un 0’5 % menor. Estimar en qué porcentaje se reducirá el caudal real respecto al previsto.

Llamando C al caudal que circula por la tubería y r al radio de la misma, sería, según el enunciado del problema: $C = k \cdot r^4$.

Si el radio disminuye en un 5 % de su valor, el nuevo radio es:

$$r_1 = r - 0'5\ \%\ de\ r = r - \frac{0'5}{100} \cdot r = r\left(1 - \frac{5}{1000}\right) = r\left(1 - \frac{1}{200}\right) = r \cdot \frac{200-1}{200} = \underline{\frac{199}{200} r = r_1}$$

El valor de la diferencia (diferencial) del radio es:

$$dr = r - r_1 = r - \frac{199}{200} r = r\left(1 - \frac{199}{200}\right) = r \cdot \frac{299-199}{200} = \underline{\frac{1}{200} r = dr}$$

La variación o diferencia de caudal será: $dC = kr^4 - k\,r_1^4 = k\left(r^4 - r_1^4\right)$.

Teniendo en cuenta que una expresión de la derivada es: $C'(r) = \frac{dC}{dr}$.

Despejando de la expresión anterior el valor pedido, será:

$$dC = C'(r) \cdot dr = \left(4k\,r^3\right) \cdot dr = 4\,k\,r^3 \cdot \frac{1}{200} r = \frac{kr^4}{50} = \frac{C}{50} = C \cdot 0'02 = \underline{2\ \%\ de\ C = dC}$$

<u>El caudal disminuye en un 2 %.</u>

****

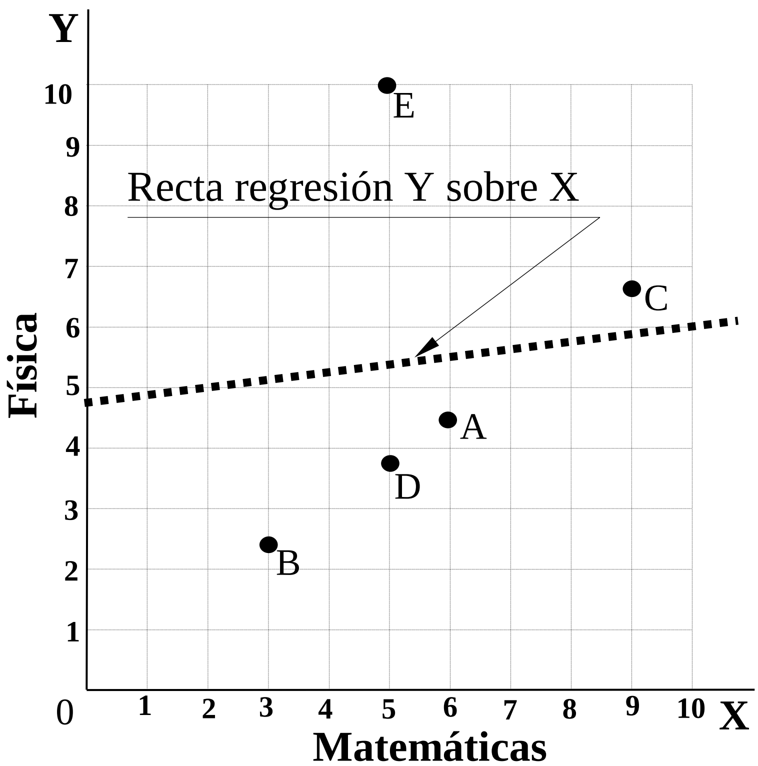
5º) Las coordenadas x e y de los puntos A(6, 4’5), B(3, 2’4), C(9, 6’6), D(5, 3’8) y $E(5,\ 10)$ son las calificaciones de cinco alumnos en Matemáticas y Física.

a) Representar los 5 puntos en unos ejes OXY y dibujar aproximadamente la recta de regresión de Y sobre X y deducir razonadamente a cuál de los números -1, 0’5 o 0’5 está más próximo el coeficiente de correlación.

b) Calcular el coeficiente de correlación de los cuatro primeros alumnos, explicando el resultado obtenido e interpretándolo gráficamente.

----

a)



La recta de regresión de Y sobre X viene dada por: $y-\overline{y}=\frac{S_{xy}}{S_x^2}\left(x-\overline{x}\right)$, donde $\overline{x}\ e\ \overline{y}$ son las medias aritméticas de las notas de matemáticas y física, respectivamente; S_{xy} es la covarianza y S_x es la desviación típica de las notas de matemáticas.

$$\overline{x}=\frac{6+3+9+5+5}{5}=\frac{28}{5}=\underline{5'60=\overline{x}}\quad ;;\quad \overline{y}=\frac{4'5+2'4+6'6+3'8+10}{5}=\frac{27'3}{5}=\underline{5'46=\overline{y}}$$

$$S_{xy}=\frac{\sum x_i\cdot y_i}{N}-\overline{x}\cdot\overline{y}=\frac{6\cdot 4'5+3\cdot 2'4+9\cdot 6'6+5\cdot 3'8+5\cdot 10}{5}-5'60\cdot 5'46=$$

$$=\frac{27+7'2+59'4+19+50}{5}-30'576=\frac{162'6}{5}-30'576=32'40-30'576=\underline{1'824=S_{xy}}$$

$$S_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \left(\overline{x}\right)^2 = \frac{6^2+3^2+9^2+5^2+5^2}{5} - 5'60^2 = \frac{36+9+81+25+25}{5} - 31'36 =$$

$$= \frac{176}{5} - 31'36 = 35'2 - 31'36 = \underline{3'84 = S_x^2}$$

$$y - \overline{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}\left(x - \overline{x}\right) \Rightarrow y - 5'46 = \frac{1'824}{3'84}\left(x - 5'60\right) \;;;\; 3'84y - 20'97 = 0'475\left(x - 5'60\right) \;;;$$

$$3'84y - 20'97 = 0'475x - 2'66 \;;;\; 0'475x - 3'84y + 18'31 = 0 \approx \underline{\underline{r \equiv x - 8y + 38 = 0}}$$

Con objeto de representar la recta anterior en el gráfico, obtenemos dos puntos dando a x dos valores adecuado, como son x = 2 y x = 10:

$$r \equiv y = \frac{x+38}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \to y = \frac{2+38}{8} = \frac{40}{8} = 5 \Rightarrow \underline{A(2,\ 5)} \\ x = 10 \to y = \frac{10+38}{8} = \frac{48}{8} = 6 \Rightarrow \underline{B(10,\ 6)} \end{cases}$$

El coeficiente de correlación lineal es $r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - \left(\overline{x}\right)^2} = \sqrt{3'84} = \underline{1'96 = S_x}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{N} - \left(\overline{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{4'5^2+2'4^2+6'6^2+3'8^2+10^2}{5} - 5'46^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{20'25+5'76+43'56+14'44+100}{5} - 29'81} = \sqrt{\frac{184'01}{5} - 29'81} = \sqrt{36'80 - 29'81} =$$

$$= \sqrt{6'99} = \underline{2'64 = S_y}$$

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{1'824}{1'96 \cdot 2'64} = \frac{1'82}{5'17} = \underline{0'35 = r}$$

Aunque no se pedía, se han realizado los cálculos con precisión.

b)

El coeficiente de correlación de los cuatro primero elementos sería el siguiente:

$$\overline{x} = \frac{6+3+9+5}{4} = \frac{23}{4} = \underline{5'725 = \overline{x}} \;;;\; \overline{y} = \frac{4'5+2'4+6'6+3'8}{4} = \frac{17'3}{4} = \underline{4'325 = \overline{y}}$$

$$S_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{6 \cdot 4'5 + 3 \cdot 2'4 + 9 \cdot 6'6 + 5 \cdot 3'8}{4} - 5'725 \cdot 4'325 =$$

$$= \frac{27 + 7'2 + 59'4 + 19}{4} - 24'76 = \frac{112'6}{45} - 24'76 = 28'15 - 24'76 = \underline{3'39 = S_{xy}}$$

El coeficiente de correlación lineal es $r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - \left(\bar{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{6^2 + 3^2 + 9^2 + 5^2}{4} - 5'725^2} = \sqrt{\frac{36 + 9 + 81 + 25}{4} - 32'78} =$$

$$= \sqrt{\frac{151}{4} - 32'78} = \sqrt{37'75 - 32'78} = \sqrt{4'97} = \underline{2'23 = S_x}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{N} - \left(\bar{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{4'5^2 + 2'4^2 + 6'6^2 + 3'8^2}{5} - 4'325^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{20'25 + 5'76 + 43'56 + 14'44}{4} - 18'71} = \sqrt{\frac{84'01}{4} - 18'71} = \sqrt{21'00 - 18'71} =$$

$$= \sqrt{2'29} = \underline{1'51 = S_y}$$

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{3'39}{2'23 \cdot 1'51} = \frac{3'29}{3'38} = \underline{0'97 = r}$$

Al estar próximo a 1 el coeficiente de correlación podemos afirmar que la correlación lineal es casi perfecta, o sea, que la dependencia es de tipo funcional, la nube de puntos se aproxima de forma casi perfecta a la recta de regresión.

****

EJERCICIO B

1º) En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:
-. Alimento Migado: 600 gr de carne, 300 gra de pescado y 100 gra de verdura.
-. Alimento Catomeal: 300 gr de carne, 400 gra de pescado y 300 gra de verdura.
-. Alimento Comecat: 200 gr de carne, 600 gra de pescado y 200 gra de verdura.
Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 gr de carne, 370 gr de pescado y 160 gr de verdura por kilo de alimento. ¿Qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada?

Llamando x, y, z a la cantidad de mezcla de Migado, Catomeal y Comecat, respectivamente, se puede expresar la siguiente relación:

$$\left.\begin{array}{r} 600x+300y+200z=470 \\ 300x+400y+600z=370 \\ 100x+300y+200z=160 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 60x+30y+20z=47 \\ 30x+40y+60z=37 \\ 10x+30y+20z=16 \end{array}\right\}$$ Restando a la primera la tercera:

$$50x=31 \;;;\; x=\frac{31}{50}=\underline{0'62=x}$$

$$\left.\begin{array}{r} 30\cdot 0'62+40y+60z=37 \\ 10\cdot 0'62+30y+20z=16 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 40y+60z=18'4 \\ 30y+20z=9'8 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 40y+60z=18'4 \\ -90y-60z=-29'4 \end{array}\right\} \Rightarrow -50y=-11 \;;;$$

$$y=\frac{11}{50}=\underline{0'22=y}$$

$$10x+30y+20z=16 \;;;\; x+3y+2z=1'6 \;;;\; 0'62+3\cdot 0'22+2z=1'6 \;;;\; 0'62+0'66+2z=1'6$$

$$2z+1'28=1'6 \;;;\; 2z=1'6-1'28 \;;;\; 2z=0'32 \;;;\; \underline{z=0'16}$$

El porcentaje es del 62 %, 22 % y 16 % de Migato, Catomeal y Comecat, respectivamente.

****

2º) Dados los planos $\pi \equiv 5x - y - z = 0$ y $\sigma \equiv x + y - z = 0$ y el punto P(9, 4, -1), determinar:

a) La ecuación del plano π_1 que pasa por P y es perpendicular a los planos π y σ.

b) El punto P' simétrico de P con respecto a la recta r, intersección de los planos π y σ.

----

a)

El plano π_1 pedido tiene como vectores directores a los vectores normales a los planos π y σ: $\overrightarrow{n_\pi} = (5,\ -1,\ -1)$ y $\overrightarrow{n_\sigma} = (1,\ 1,\ -1)$, por lo tanto se puede definir como:

$$\pi_1\left(P;\ \overrightarrow{n_\pi},\ \overrightarrow{n_\sigma}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-9 & y-4 & z+1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;$$

$$(x-9) + 5(z+1) - (y-4) + (z+1) + (x-9) + 5(y-4) = 0 \ ;;$$

$$2(x-9) + 4(y-4) + 6(z+1) = 0 \ ;; \ (x-9) + 2(y-4) + 3(z+1) = 0 \ ;;$$

$$x - 9 + 2y - 8 + 3z + 3 = 0$$

$$\underline{\underline{\pi_1 \equiv x + 2y + 3z - 14 = 0}}$$

b)

La expresión por unas ecuaciones paramétricas de la recta r es la siguiente y un vector director de la misma son los siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} \pi \equiv 5x - y - z = 0 \\ \sigma \equiv x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \lambda} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 5\lambda \\ y - z = -\lambda \end{cases} \Rightarrow 2y = 4\lambda \ ;; \ \underline{y = 2\lambda}$$

$$y - z = -\lambda \ ;; \ z = y + \lambda = \lambda + 2\lambda \ ;; \ \underline{z = 3\lambda} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}}$$

El punto N de intersección de la recta r con el plano π_1 es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv x + 2y + 3z - 14 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda + 4\lambda + 9\lambda - 14 = 0 \ ;; \ 14\lambda - 14 = 0 \ ;; \ \lambda = 1 \Rightarrow \underline{N(1,\ 2,\ 3)}$$

Para que N sea el punto simétrico de P con respecto a r, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP'} \;\Rightarrow\; N - P = P' - N \;\;;;\;\; (1,\; 2,\; 3) - (9,\; 4,\; -1) = (x,\; y,\; z) - (1,\; 2,\; 3)\;;;$$

$$(-8,\; -2,\; 4) = (x-1,\; y-2,\; z-3) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 1 = -8 \rightarrow \underline{x = -7} \\ \\ y - 2 = -2 \rightarrow \underline{y = 0} \\ \\ z - 3 = 4 \rightarrow \underline{z = 7} \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P'(-7,\; 0,\; 7)}}$$

****

3º) En el plano se tiene la curva $y = x^2 + 2x - 1$. Encontrar razonadamente las ecuaciones de las rectas que pasan por P(2, 3) y son tangentes a dicha curva.

El haz de rectas que pasan por el punto P(2, 3) es:

$y - 3 = m(x - 2)$;; $\underline{y = mx - 2m + 3}$

Si las rectas son tangentes a la curva, necesariamente tienen un solo punto en común, lo cual significa que el discriminante de la ecuación de segundo grado resultante tiene que ser cero.

El sistema que forman la tangente y la curva es: $\begin{cases} y = x^2 + 2x - 1 \\ y = mx - 2m + 3 \end{cases}$.

Resolviendo: $x^2 + 2x - 1 = mx - 2m + 3$;; $x^2 + (2 - m)x + (2m - 4) = 0$.

$$x = \frac{m - 2 \pm \sqrt{(2 - m)^2 - 4 \cdot (2m - 4)}}{2} \Rightarrow (2 - m)^2 - 4 \cdot (2m - 4) = 0 \;;;\; (2 - m)^2 = 4\,(2m - 4) \;;;$$

$4 - 4m + m^2 = 8m - 16$;; $\underline{m^2 - 12m + 20 = 0}$

$$m = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 20}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{12 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{m_1 = 10} \\ \underline{m_2 = 2} \end{cases}$$

Las ecuaciones de las rectas son:

$t_1 \equiv y - 3 = 10(x - 2)$;; $y - 3 = 10x - 20 \Rightarrow \underline{\underline{t_1 \equiv 10x - y - 17 = 0}}$

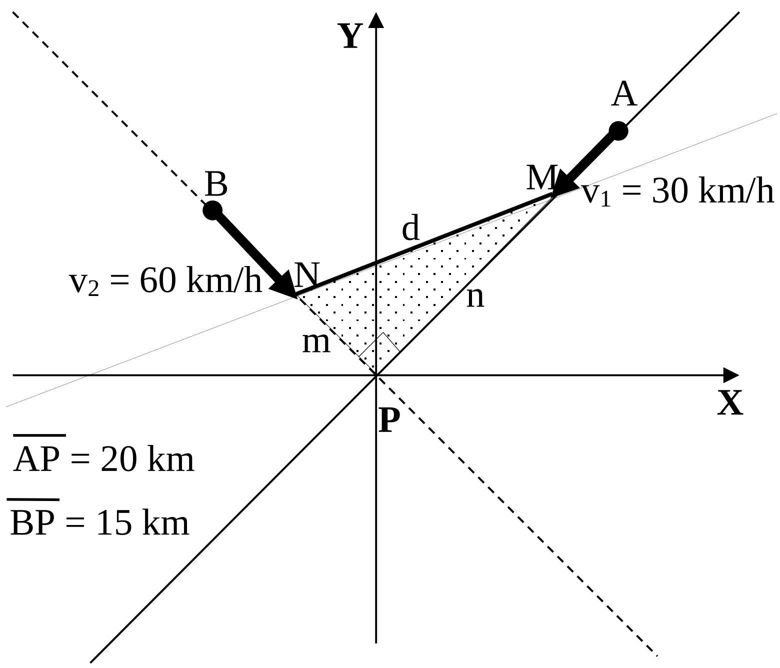
$t_2 \equiv y - 3 = 2(x - 2)$;; $y - 3 = 2x - 4 \Rightarrow \underline{\underline{t_2 \equiv 2x - y - 1 = 0}}$

****

4º) El trazado de dos canales navegables en un mapa discurre según las rectas $y = x$ e $y = -x$. Dos lanchas motoras A y B, salen al mismo tiempo de puntos situados sobre cada uno de los canales a distancias de 20 y 15 km, respectivamente, del punto P donde confluyen. La lancha A se dirige a P con velocidad de 30 km/h y la lancha B se dirige a P con una velocidad de 60 km/h. Se considera despreciable la anchura de los canales y la longitud de las lanchas y se pide calcular:

a) La distancia entre las lanchas en función del tiempo desde que inician el recorrido.

b) La distancia mínima a la que pueden estar las lanchas.



a)

Después de un tiempo de t horas las lanchas A y B se encuentran situadas en los puntos M y N, respectivamente.

Los valores de los lados m y n del triángulo rectángulo de vértices AMP son, según las velocidades de cada lancha, los siguientes:

$n = 20 - 30t$;; $m = 15 - 60t$.

La distancia d entre ambos en ese instante es la hipotenusa del triángulo rectángulo, que es la función pedida con respecto al tiempo.

$$d(t) = \sqrt{(20 - 30t)^2 + (15 - 60t)^2} = \sqrt{400 - 1200t + 900t^2 + 225 - 1800t + 3600t^2} =$$

$$= \sqrt{4500t^2 - 3000t + 625} = \underline{\underline{5\sqrt{180t^2 - 120t + 25} = d(t)}}$$

b)

La distancia será mínima cuando su derivada sea cero:

$$d'(t) = 5 \cdot \frac{360t - 120}{\sqrt{180t^2 - 120t + 25}} = 0 \Rightarrow 360t - 120 = 0 \;;\; 3t - 1 = 0 \;;\; \underline{t = \frac{1}{3} hora}$$

La distancia mínima entre las lanchas se produce a los 20 minutos del comienzo, y su valor es:

$$d\left(\tfrac{1}{3}\right) = 5 \cdot \sqrt{180 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 120 \cdot \frac{1}{3} + 25} = 5\sqrt{20 - 40 + 25} = 5\sqrt{5} \cong \underline{\underline{11'18\ km = d}}$$

****

5º) El peso de los estudiantes de una universidad se distribuye normalmente, con media aritmética de $x = 65\ kgr$ y desviación típica $\sigma = 1'5\ kgr$. Obtener razonadamente:

a) El tanto por ciento de estudiantes con peso entre 63’5 y 68 kg.

b) La probabilidad de que al elegir al azar 3 estudiantes, dos pesen más de 68 kgr.

----

a)

En primer lugar tipificamos la variable (peso) X, para lo cual utilizamos la fórmula $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, donde : X =63’5; μ = 65 y σ = 1’5, con lo cual resulta:

$$Z_1 = \frac{63'5 - 65}{1'5} = \frac{-1'5}{1'5} = -1\ ;;\ Z_2 = \frac{68 - 65}{1'5} = \frac{3}{1'5} = 2$$

La probabilidad de que un estudiante pese entre 63’5 y 68 kgr es:

$$p(63'5 \leq X \leq 68) = p(-1 \leq Z \leq 2) = p(Z \leq 2) - p(Z \leq -1) = p(Z \leq 2) - p(Z > 1) =$$

$$= p(Z \leq 2) - [1 - p(Z \leq 1)] = p(Z \leq 2) + p(Z \leq 1) - 1 = 0'9772 + 0'8413 - 1 = \underline{0'8185}$$

La probabilidad de que un estudiante pese entre 63’5 y 68 es del 82 %

b)

La probabilidad de que des de los tres estudiantes pesen más de 68 kgr es:

$$p(X > 68) = p(Z > 2) = 1 - p(Z \leq 2) = 1 - 0'9772 = \underline{0'0228}$$

La probabilidad es del 2’28 %.

****