PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

SEPTIEMBRE 2003

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 2 horas

Se elegirá el Ejercicio A o el B, del que sólo se harán tres de los cuatro ejercicios.
Cada problema se puntuará de 0 a 3'3, según la puntuación máxima indicada en cada apartado. La suma de las puntuaciones mas 0'1 será la calificación de esta prueba.
Cada estudiante deberá disponer de una calculadora científica o gráfica para el examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria).

EJERCICIO A

1º) Considerar las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -(m+1) \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de m es A inversible? Calcular la matriz A^{-1}.

b) En la anterior matriz A con m = 0, obtener la matriz real cuadrada X de orden 3 que satisface la igualdad: $B - A \cdot X = A \cdot B$.

----

a)

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -(m+1) \end{vmatrix} = 3 - 5m + m(m+1) = 3 - 5m + m^2 + m = m^2 - 4m + 3 = 0 \;\;;;$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{m_1 = 3} \\ \underline{m_2 = 1} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{A \;\; es \;\; inversible \;\; \forall m \in R, \;\; tal \;\; que \;\; m \neq 3 \;\; y \;\; m \neq 1.}}$$

La matriz inversa pedida es la siguiente:

$$A^T=\begin{pmatrix}0 & 1 & 5\\ m & 0 & 1\\ 3 & -1 & -m-1\end{pmatrix}\ ;;\ Adj\left(A^T\right)=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & -m-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}m & 1\\ 3 & -m-1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}m & 0\\ 3 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 5\\ -1 & -m-1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 5\\ 3 & -m-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 5\\ m & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ m & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & m^2+m+3 & -m\\ m-4 & -15 & 3\\ 1 & 5m & -m\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\underline{\underline{A^{-1}=\frac{1}{(m-1)(m-3)}\cdot\begin{pmatrix}1 & m^2+m+3 & -m\\ m-4 & -15 & 3\\ 1 & 5m & -m\end{pmatrix},\ \forall m\neq 1\ \ y\ \ m\neq 3}}$$

b)

$$Para\ \ m=0\ \Rightarrow\ A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}\ \ \Rightarrow\ \ A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 1 & 0\\ -\frac{4}{3} & -5 & 1\\ \frac{1}{3} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$B-A\cdot X=A\cdot B\ ;;\ B-A\cdot B=A\cdot X\ ;;\ I\cdot B-A\cdot B=A\cdot X\ ;;\ (I-A)\cdot B=A\cdot X\ ;;$$

$$A^{-1}\cdot(I-A)\cdot B=A^{-1}\cdot A\cdot X\ ;;\ A^{-1}\cdot(I-A)\cdot B=I\cdot X\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ X=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 1 & 0\\ -\frac{4}{3} & -5 & 1\\ \frac{1}{3} & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 5 & 1 & -1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 1 & 0\\ -\frac{4}{3} & -5 & 1\\ \frac{1}{3} & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ -1 & 1 & 1\\ -5 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}-1 & 1 & -1+1\\ -\frac{4}{3}+5-5 & -5-1 & 4-5+2\\ \frac{1}{3} & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{3} & 0\\ -6 & -\frac{4}{3} & 1\\ 0 & \frac{1}{3} & -1\end{pmatrix}=X}}$$

****

2º) En una gran pradera se tiene que vallar una zona de 400 m^2, que debe tener forma de rectángulo. Cada metro de la valla cuesta 100 euros. Si x es la medida en metros de uno de los lados, se pide:

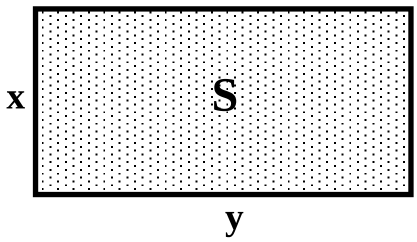
a) Obtener razonadamente la función f tal que f(x) sea el coste de la valla, indicando entre qué valores puede variar x.

b) Deducir razonadamente el valor de x para el que la función f(x) alcanza el valor mínimo.

----

a)

$$S = x \cdot y = 400 \;;\; \underline{y = \frac{400}{x}}$$



$$Coste = f(x) = 2 \cdot (x + y) \cdot 100 = 200 \cdot \left(x + \frac{400}{x} \right) \;;$$

$$\underline{\underline{f(x) = 200 \cdot \frac{x^2 + 400}{x}}}$$

En teoría el dominio de la función es R, pero considerando un valor mínimo de x de 1 metro, sería:

$$\underline{\underline{D(f) \Rightarrow (1,\; 400)}}$$

b)

$$f'(x) = 200 \cdot \frac{2x \cdot x - 1 \cdot (x^2 + 400)}{x^2} = 200 \cdot \frac{2x^2 - x^2 - 400}{x^2} = \underline{200 \cdot \frac{x^2 - 400}{x^2} = f'(x)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 400 = 0 \;;\; x^2 = 400 \;;\; x = \pm\sqrt{400} = \pm 20 \quad (-20 \;\; carece \;\; de \;\; sentido)$$

$$\underline{\underline{Solución: \; x = 20}}$$

Justificación:

$$f''(x) = 200 \cdot \frac{2x \cdot x^2 - 2x \cdot (x^2 - 400)}{x^4} = 200 \cdot \frac{2x^2 - 2x^2 + 800}{x^3} = \underline{\frac{160.000}{x^3} = f''(x)}$$

$$f''(20) = \frac{160.000}{20^3} > 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Mínimo, \;\; c.q.j.}}$$

****

3º) Las notas de Filosofía y de Literatura de los 7 alumnos de una clase, listadas por columnas, son:

Filosofía (x)	3	6	7	5	8	4	8
Literatura (y)	5	8	7	7	9	5	5

a) Calcular el valor medio y la desviación típica de las notas de Filosofía y de las notas de Literatura.

b) Obtener el coeficiente de correlación entre las notas de Filosofía y de Literatura, explicando su significado.

c) Al prescindir de la última columna el coeficiente de correlación es 0’9. Explicar detalladamente por qué es mayor que el obtenido en el apartado b).

----

a)

$$\textit{Filosofía} \;\Rightarrow\; \overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{3+6+7+5+8\cdot 2+4}{N} = \frac{41}{7} = \underline{\underline{5'8571 = \overline{x}}}$$

$$\textit{Literatura} \;\Rightarrow\; \overline{y} = \frac{\sum {}_i \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{5\cdot 3+8+7\cdot 2+9}{N} = \frac{46}{7} = \underline{\underline{6'5714 = \overline{y}}}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{3^2+6^2+7^2+5^2+8^2\cdot 2+4^2}{7} - 5'8571^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{9+36+49+25+64\cdot 2+16}{7} - 34'3061} = \sqrt{\frac{263}{7} - 34'3061} = \sqrt{3'2653} = \underline{\underline{1'8070 = \sigma_x}}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 \cdot n_i}{N} - \overline{y^2}} = \sqrt{\frac{5^2\cdot 3+8^2+7^2\cdot 2+9^2}{7} - 6'5714^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{25\cdot 3+64+49\cdot 2+81}{7} - 43'1837} = \sqrt{\frac{318}{7} - 43'1837} = \sqrt{2'2449} = \underline{\underline{1'4983 = \sigma_y}}$$

b)

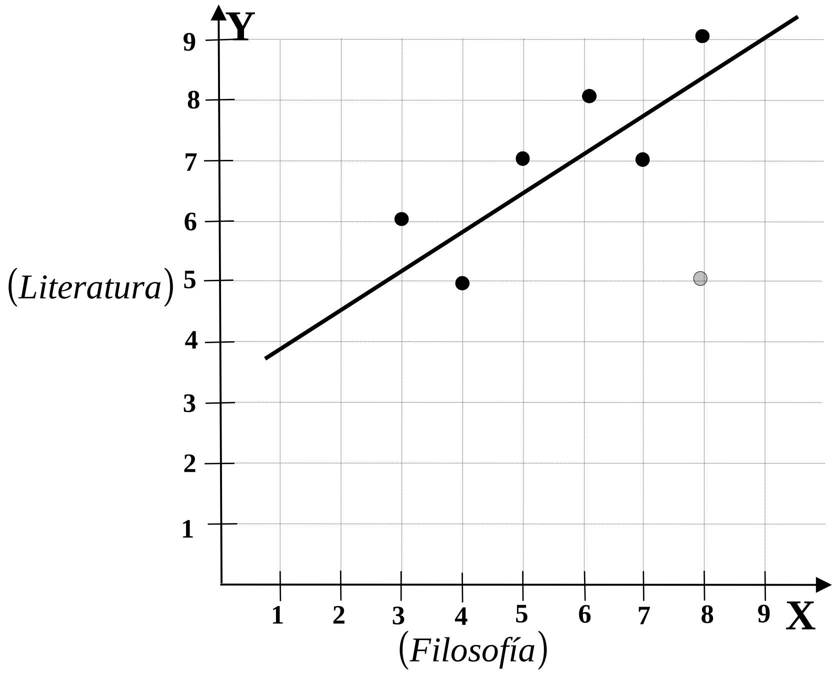
$$\sigma_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \overline{x}\cdot\overline{y} = \frac{3\cdot 5+6\cdot 8+7\cdot 7+5\cdot 7+8\cdot 9+4\cdot 5+8\cdot 5}{7} - 5'8571\cdot 6'5714 =$$

$$= \frac{15+48+49+35+72+20+40}{7} - 38'4898 = \frac{279}{7} - 38'4898 = \underline{1'3673 = \sigma_{xy}}$$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{1'3673}{1'8070 \cdot 1'4983} = \frac{1'3673}{2'7074} = \underline{\underline{0'5050 = r}}$$

<u>La correlación lineal entre las dos variables es positiva y débil, ya que no se aproxima a la unidad.</u>

c)



Como se aprecia perfectamente en el gráfico, el punto (8, 5) está muy desplazado con respecto a la nube de puntos, con lo cual, una vez eliminado, la correlación lineal de los demás puntos es mucho mayor, como cabe esperar.

****

4º) En el espacio R^3, se consideran el punto P(3, 2, 3) y la recta r, intersección de los planos de ecuaciones $\pi \equiv x+3y-4z=0$ y $\pi' \equiv x+2y-2z=1$. Se pide determinar:

a) La distancia d del punto P a la recta r.

b) Los puntos M y N de la recta r que cumplan que su distancia al punto P es $\sqrt{5}\,d$.

c) El área del triángulo de vértices P, M y N.

----

a)

La recta r se puede expresar mediante unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x+3y-4z=0 \\ x+2y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \;\;;;\;\; \begin{cases} x+3y=4\lambda \\ -x-2y=-1-2\lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{y=-1+2\lambda}$$

$$x+2(-1+2\lambda)-2\lambda=1 \;\;;;\;\; x-2+4\lambda-2\lambda=1 \;\;;;\;\; \underline{x=3-2\lambda}$$

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} Un\ \ punto\ \ de\ \ r \Rightarrow \underline{A(3,\ -1,\ 0)} \\ \\ Un\ \ vector\ \ director\ \ de\ \ r \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v}=(-2,\ 2,\ 1)} \end{cases}$$

La distancia de un punto P a la recta r viene dada por la fórmula:

$d\,(P,\,r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$, siendo A un punto cualquiera de r. Por ejemplo, $A(3,\ -1,\ 0)$.

$$\overrightarrow{AP}=P-A=(3,\,2,\,3)-(3,\ -1,\ 0)=(0,\ 3,\ 3).$$

$$\left\|\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{v}\right\|=\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{matrix}\right\|=\left|3i-6j+6k-6i\right|=\left|-3i-6j+6j\right|=\left|(-3,\ -6,\ 6)\right|=$$

$$=\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+6^2}=\sqrt{9+36+36}=\sqrt{81}=\underline{9}$$

$$\left|\overrightarrow{v}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=\underline{3}$$

$$d\,(P,\,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}=\frac{9}{3}=\underline{\underline{3\ \ unidades=d\,(P,\ r)}}$$

b)

Un punto general de la recta r es: $Q(3-2\lambda,\ -1+2\lambda,\ \lambda)$ y $P(3,\ 2,\ 3)$.

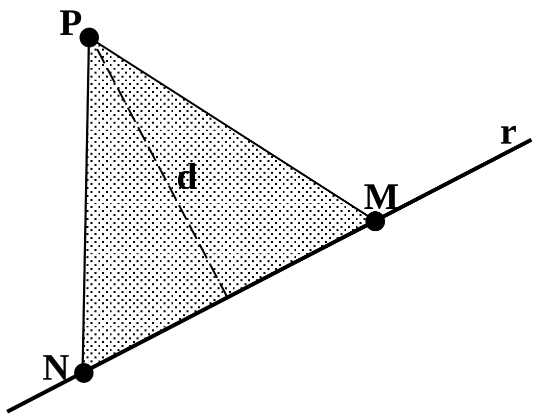
$$\overline{QP}=d\ \Rightarrow\ \sqrt{(3-3+2\lambda)^2+(2+1-2\lambda)^2+(3-\lambda)^2}=3\sqrt{5}\ ;;$$

$$(2\lambda)^2+(3-2\lambda)^2+(3-\lambda)^2=45\ ;;\ 4\lambda^2+9-12\lambda+4\lambda^2+9-6\lambda+\lambda^2=45\ ;;$$

$$9\lambda^2-18\lambda+18=45\ ;;\ \lambda^2-2\lambda+2=5\ ;;\ \lambda^2-2\lambda-3=0\ ;;$$

$$\lambda=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}\Rightarrow\begin{cases}\underline{\lambda_1=3}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{M(-3,\ 5,\ 3)}}\\ \\ \underline{\lambda_2=-1}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{N(5,\ -3,\ -1)}}\end{cases}$$

c)



Se trata de un triángulo isósceles cuya base es el segmento $\overline{MN}$ y la altura es la distancia hallada en el apartado a), tal como indica la figura.

$$\overline{MN}=|\,N-M\,|=|\,(5,\ -3,\ -1)-(-3,\ 5,\ 3)\,|=$$

$$=|\,(8,\ -8,\ -4)\,|=\sqrt{64+64+16}=\sqrt{144}=12$$

$$S=\frac{\overline{MN}\cdot d}{2}=\frac{12\cdot 3}{2}=6\cdot 3=\underline{\underline{18\ u^2=S}}$$

****

EJERCICIO B

1º) Se consideran las matrices $P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ y $Q=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

a) Calcular la matriz P^{-1}.

b) La matriz real X de orden 2, tal que: $P^{-1}\cdot X\cdot P=Q$.

c) La matriz $\left(P\cdot Q\cdot P^{-1}\right)^2$.

----

a)

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\ ;;\ P^T=P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\ ;;\ |P|=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}=3-4=\underline{-1}\ ;;$$

$$Adj.\ de\ P^T=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ P^{-1}=\frac{Adj.\ de\ P^T}{|P|}=\frac{\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}}{-1}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}=P^{-1}}}$$

b)

$$P^{-1}\cdot X\cdot P=Q\ ;;\ P\cdot P^{-1}\cdot X\cdot P=P\cdot Q\ ;;\ X\cdot P=P\cdot Q\ ;;\ X\cdot P\cdot P^{-1}=P\cdot Q\cdot P^{-1}\ ;;$$

$$X=P\cdot Q\cdot P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 4 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6+12 & 4-6\\ -12+18 & 8-9\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{X=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 6 & -1\end{pmatrix}}}$$

c)

$$X=P\cdot Q\cdot P^{-1}\ \Rightarrow\ \left(P\cdot Q\cdot P^{-1}\right)^2=X^2=X\cdot X=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 6 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & -2\\ 6 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}36-12 & -12+2\\ 36-6 & -12+1\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}24 & -10\\ 30 & -11\end{pmatrix}=\left(P\cdot Q\cdot P^{-1}\right)^2}}$$

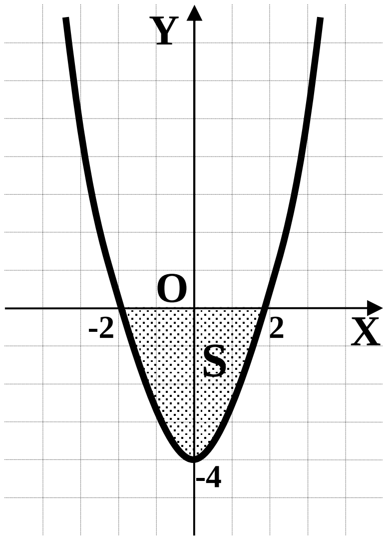
****

2º) a) Representar la superficie S limitada por el eje OX y la curva $y = x^2 - 4$, cuando $-2 \le x \le 2$. Obtener, razonadamente, mediante la integral el área de S.

b) Hallar el volumen del cuerpo generado al dar un giro completo alrededor del eje OX la superficie S considerada en el apartado anterior, indicando como se ha obtenido el volumen.

----

a)



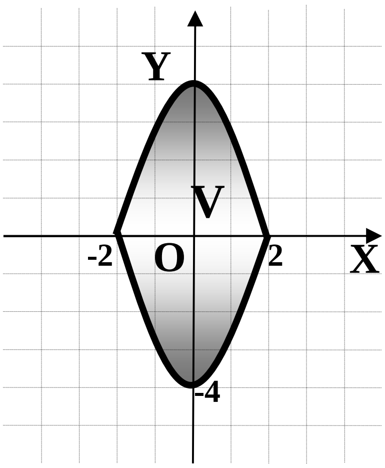
Por estar todas las ordenadas de la curva en la zona del área que deseamos calcular, invertimos los límites de integración con objeto de que el valor del área resulte positivo.

$$S = \int_{2}^{-2} \left(x^2 - 4\right) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^{-2} =$$

$$= \left[\frac{(-2)^3}{3} - 4 \cdot (-2)\right] - \left(\frac{2^3}{3} - 4 \cdot 2\right) = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 =$$

$$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{48 - 16}{3} = \underline{\underline{\frac{32}{3}\ u^2 = S}}$$

b)



Sabiendo que el volumen engendrado por una función f(x) al girar en torno al eje OX entre los valores reales a y b, viene dado por la expresión:

$V = \int_a^b 2\pi \cdot [f(x)]^2 \cdot dx$, sería, en nuestro caso:

$$V = \int_{-2}^{2} \pi \cdot [f(x)]^2 \cdot dx = \pi \int_{-2}^{2} \left(x^2 - 4\right)^2 \cdot dx =$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} \left(x^4 - 8x^2 + 16\right) \cdot dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \pi \left[\left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32\right) - \left(-\frac{32}{5} + \frac{64}{3} - 32\right)\right] = \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 + \frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32\right) =$$

$$= \pi \left(64 + \frac{64}{5} - \frac{128}{3}\right) = \frac{\pi}{15}(960 + 192 - 640) = \frac{\pi}{15}(1152 - 640) = \underline{\underline{\frac{512}{15}\pi\ u^3 = V}}$$

****

3º) El peso medio de un grupo de 500 estudiantes es 68’5 kilos y la desviación típica, 10 kilos. Suponiendo que los pesos siguen una distribución normal, se pide:

a) ¿Cuántos estudiantes pesan entre 48 y 71 kilos?

b) ¿Cuántos estudiantes pesan más de 91 kilos?

c) Se eligen 5 alumnos al azar. ¿Cuál es la posibilidad de que exactamente 2 de ellos pesen más de 75 kilos?

----

a)

$$\left.\begin{array}{l}\mu = 68'5 \\ \sigma = 10\end{array}\right\} \Rightarrow P(48 < X < 71) \cong P\left(\frac{48-68'5}{10} < Z < \frac{71-68'5}{10}\right) = P(-2'05 < Z < 0'25) =$$

$$= P(Z < 2'05) - P(Z > 2'05) \cong P(Z < 0'25) - 1 + P(Z < 2'05) = 0'5987 - 1 + 0'9798 =$$

$$= \underline{0'5787} \;\Rightarrow\; 500 \cdot 0'5787 = 289'35 \cong \underline{289}$$

<u>Habrá 289 estudiantes que pesan entre 48 y 71 kilos.</u>

b)

$$La \;\; P(X > 91) = P\left(Z > \frac{91-68'5}{10}\right) = P(Z > 2'25) = 1 - P(Z < 2'25) = 1 - 0'9878 = 0'0122 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 500 \cdot 0'0122 = 6'1 \cong \underline{6}$$

<u>Habrá 6 estudiantes que pesan más de 91 kilos.</u>

c)

Eligiendo 5 estudiantes al azar, se trataría de una distribución binomial de las siguientes características: n = 5 y p = P, siendo P la probabilidad de que un estudiante pese más de 75 kilos, o sea:

$$P(X > 75) = P\left(Z > \frac{75-68'5}{10}\right) = P(Z > 0'65) = 1 - P(Z < 0'65) = 1 - 0'7422 = \underline{0'2578 = p} \;\; ;;$$

$$q = 1 - p = 1 - 0'2578 = \underline{0'7422 = q}$$

$$P(X' = 2) = \binom{5}{2} \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 \cdot 0'2578^2 \cdot 0'7422^3 = 10 \cdot 0'0665 \cdot 0'4088 = \underline{\underline{0'2719 = P(X' = 10)}}$$

****

4º) Sean π y π' los planos del espacio R^3, determinados del modo siguiente: El plano π pasa por los puntos $A(0,\ 2,\ 1)$, $B(3,\ -1,\ 1)$ y $C(1,\ -1,\ 5)$ y el plano π' pasa por los puntos $M(3,\ 0,\ 2)$, $N(2,\ 1,\ 1)$ y $P(5,\ 4,\ -2)$. Se pide calcular:

a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta r, intersección de los planos π y π'.

b) El ángulo α que forman los planos π y π'.

c) La ecuación del plano π'' que contiene a la recta r y forma 90º con el plano π.

----

a)

$$\pi \Rightarrow \left\{\begin{matrix} A(0,\ 2,\ 1) \\ B(3,\ -1,\ 1) \\ C(1,\ -1,\ 5) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,\ -1,\ 1) - (0,\ 2,\ 1) = \underline{(3,\ -3,\ 0)} \\ \\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (1,\ -1,\ 5) - (0,\ 2,\ 1) = \underline{(1,\ -3,\ 4)} \end{matrix}\right.$$

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -12x - 9(z-1) + 3(z-1) - 12(y-2) = 0\ ;;$$

$$12x + 12(y-2) + 6(z-1) = 0\ ;;\ 2x + 2y - 4 + z - 1 = 0\ ;;\ \underline{\underline{\pi \equiv 2x + 2y + z - 5 = 0}}$$

$$\pi' \Rightarrow \left\{\begin{matrix} M(3,\ 0,\ 2) \\ N(2,\ 1,\ 1) \\ P(5,\ 4,\ -2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{w} = \overrightarrow{MN} = N - M = (2,\ 1,\ 1) - (3,\ 0,\ 2) = \underline{(-1,\ 1,\ -1)} \\ \\ \overrightarrow{z} = \overrightarrow{MP} = P - M = (5,\ 4,\ -2) - (3,\ 0,\ 2) = \underline{(2,\ 4,\ -4)} \end{matrix}\right.$$

$$\pi'(M;\ \overrightarrow{w},\ \overrightarrow{z}) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z-2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0\ ;;$$

$$-4(x-3) - 2y - 4(z-2) - 2(z-2) + 4(x-3) - 4y = 0\ ;;\ -6y - 6(z-2) = 0\ ;;$$

$$\underline{\underline{\pi' \equiv y + z - 2 = 0}}$$

$$r \equiv \left.\begin{matrix} 2x + 2y + z - 5 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{z = \lambda}\ ;;\ \underline{y = 2 - \lambda}\ ;;\ 2x + 2(2-\lambda) + \lambda - 5 = 0\ ;;$$

$$2x + 4 - 2\lambda + \lambda - 5 = 0\ ;;\ 2x = 1 + \lambda\ ;;\ \underline{x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Un \;\; punto \;\; de \;\; r \;\; \Rightarrow \;\; \lambda = 1 \rightarrow \underline{Q(1,\ 1,\ 1)} \\ \\ Un \;\; vector \;\; director \;\; de \;\; r \;\; \Rightarrow \;\; \underline{\overrightarrow{s} = (1,\ -2,\ 2)} \end{cases}$$

b)

Un vector normal de $\pi \Rightarrow \underline{\overrightarrow{n} = (2,\ 2,\ 1)}$.

Un vector normal de $\pi' \Rightarrow \underline{\overrightarrow{n'} = (0,\ 1,\ 1)}$.

El ángulo que forman los planos π y π' es el mismo que forman sus vectores normales $\overrightarrow{n}$ y $\overrightarrow{n'}$.

Aplicando el concepto de producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'} = \left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n'}\right| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'}}{\left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n'}\right|} = \frac{(2,\ 2,\ 1) \cdot (0,\ 1,\ 1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{0 + 2 + 1}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 45^{\circ}}}$$

c)

El plano pedido, π'', tiene como vectores directores al vector director de la recta r, $\overrightarrow{v} = (1,\ -2,\ 2)$ y al vector normal del plano π, $\overrightarrow{n} = (2,\ 2,\ 1)$ y como punto, cualquiera que pertenezca a la recta r, por ejemplo, Q(1, 1, 1):

$$\pi''\left(Q;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{n}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\; ;;$$

$$-2(x-1) + 4(y-1) + 2(z-1) + 4(z-1) - 4(x-1) - (y-1) = 0 \;\; ;;$$

$$-6(x-1) + 3(y-1) + 6(z-1) = 0 \;\; ;; \;\; 2(x-1) - (y-1) - 2(z-1) = 0 \;\; ;;$$

$$2x - 2 - y + 1 - 2z + 2 = 0 \;\; ;; \;\; \underline{\underline{\pi'' \equiv 2x - y - 2z + 1 = 0}}$$

****