PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

SEPTIEMBRE – 2002

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 2 horas

Se elegirá el Ejercicio A o el B, del que sólo se harán tres de los cuatro ejercicios.

Cada problema se puntuará de 0 a 3'3, según la puntuación máxima indicada en cada apartado. La suma de las puntuaciones mas 0'1 será la calificación de esta prueba.

EJERCICIO A

1º) Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 9 & 4\end{pmatrix}$;; $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}$;; $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$;; $D=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular la matriz M = A – 2BC.

b) Justificar que existe matriz D^{-1} inversa de D y calcularla.

c) Calcular las matrices X, Y que cumplen DX = M = YD.

----

a)

$$M=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 9 & 4\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 9 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -2 & 2\\ -4 & 6 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 9 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4+6+2 & 2-4+8\\ -8-18-4 & 4+12-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 9 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 6\\ -30 & 0\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}9 & 14\\ -21 & 4\end{pmatrix}=M}}$$

b)

$$D=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix} \;;;\; |D|=\begin{vmatrix}3 & 7\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6-7=-1\neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{Existe\ \ D^{-1},\ c.q.j.}}$$

$$D^T=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 7 & 2\end{pmatrix} \;;;\; Adj.\ de\ D^T=\begin{pmatrix}2 & -7\\ -1 & 3\end{pmatrix} \;;;\; D^{-1}=\frac{Adj.\ de\ D^T}{|D|}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 1 & -3\end{pmatrix}=D^{-1}}}$$

c)

$$D \cdot X = M \ ;; \ D^{-1} \cdot D \cdot X = D^{-1} \cdot M \ ;; \ I \cdot X = D^{-1} \cdot M \ ;; \ X = D^{-1} \cdot M \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18-147 & -28+28 \\ 9+63 & 14-12 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -165 & 0 \\ 72 & 2 \end{pmatrix} = X}}$$

$$M = Y \cdot D = M \ ;; \ M \cdot D^{-1} = Y \cdot D \cdot D^{-1} \ ;; \ M \cdot D^{-1} = Y \cdot I \ ;; \ Y = M \cdot D^{-1} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18+14 & 63-42 \\ 42+4 & -147-12 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -4 & 21 \\ 46 & -159 \end{pmatrix} = Y}}$$

****

2º) Las tallas de los ciudadanos adultos de una gran ciudad siguen una distribución normal de media 1’70 y desviación típica 0’20.

a) Se selecciona al azar un ciudadano. Averiguar razonadamente cuál es la probabilidad de que su talla sea superior a 1’95.

b) Se selecciona al azar otro ciudadano entre los de talla superior a 1’65. Averiguar razonadamente cuál es la probabilidad de que su talla sea superior a 1’95.

----

a)

En primer lugar tipificamos la variable (talla) X, para lo cual utilizamos la fórmula $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, donde : $X = 1'95,\ \mu = 1'70\ \ y\ \ \sigma = 0'20$, con lo cual resulta:

$$Z = \frac{1'95 - 1'70}{0'20} = \frac{0'25}{0'20} = 1'25$$

La probabilidad de que una persona mida más de 1’95, utilizando la tabla de la distribución normal, es:

$$p(X > 1'95) = p(Z > 1'95) = 1 - p(Z - 1'25) = 1 - 0'8944 = \underline{\underline{0'1056 = p(X > 1'95)}}$$

b)

Tipificando ahora para X = 1’65:

$$Z = \frac{1'65 - 1'70}{0'20} = \frac{-0'05}{0'20} = 0'25$$

La probabilidad de que una persona que mide más de 1’65, mida más de 1’95 se calcula del modo siguiente:

Sea A es suceso de que al elegir un individuo mida mas de 1’65.

Sea B es suceso de que al elegir un individuo mida mas de 1’95.

Se trata de calcula la probabilidad de que, una vez que se ha producido el suceso A, se produzca el suceso B, es decir: $p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$. (*)

Al ser A un subconjunto de B se cumple que:

$$p(B \cap A) = p(B) = p(X > 1'95) = \underline{0'1056 = p(B \cap A)}.$$

$$p(A) = p(X > 1'65) = p(Z > -0'25) = p(Z \leq 0'25) = 1 - 0'5987 = \underline{0'4013 = p(A)}.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de $p(B/A)$ y $p(A)$, resulta:

$$p(B/A) = \frac{0'1056}{0'4013} = \underline{\underline{0'2631}}$$

****

3º) Se consideran los planos $\begin{cases} \pi_1 \equiv x+y-6=0 \\ \pi_2 \equiv 2x+4y+\lambda z+2=0 \end{cases}$, donde λ es un parámetro real. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta r intersección de los dos planos cuando $\lambda = 4$.

b) Calcular razonadamente λ para que los planos π_1 y π_2 se corten formando un ángulo de 45º.

----

a)

Para $\lambda = 4$ es $r \equiv \begin{cases} x+y-6=0 \\ 2x+4y+4z+2=0 \end{cases}$, simplificando: $r \equiv \begin{cases} x+y-6=0 \\ x+2y+2z+1=0 \end{cases}$.

La expresión de r en unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-6=0 \\ x+2y+2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\mu} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=6 \\ x+2y=-1-2\mu \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -x-y=-6 \\ x+2y=-1-2\mu \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{y=-7-2\mu} \;;;\; x+y=6 \;;;\; x-7-2\mu=6 \;;;\; \underline{x=13+2\mu}$$

$$r \equiv \begin{cases} x=13+2\mu \\ y=-7-2\mu \\ z=\mu \end{cases}$$

b)

El ángulo que forman dos planos π_1 y π_2 es el mismo que forman dos vectores normales a los planos, que es este caso son $\overrightarrow{n_1}=(1,\ 1,\ 0)$ y $\overrightarrow{n_2}=(2,\ 4,\ \lambda)$, respectivamente.

Teniendo en cuenta el producto escalar de dos vectores es.

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = \left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right| \cdot \cos 45^{\circ} \Rightarrow (1,\ 1,\ 0) \cdot (2,\ 4,\ \lambda) = \sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{2^2+4^2+\lambda^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \;;;$$

$$2+4=\sqrt{2} \cdot \sqrt{20+\lambda^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \;;;\; 6=\sqrt{20+\lambda^2} \;;;\; 36=20+\lambda^2 \;;;\; \lambda^2=16 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$$

****

4º) Sea $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Hallar a, b, c sabiendo que f alcanza un máximo para $x=-4$ y un mínimo en x = 0 y que f(1) = 1.

Por ser $f(1)=1 \Rightarrow 1+a+b+c=1$;; $\underline{a+b+c=0}$ (1)

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow \begin{cases} f'(0)=0 \Rightarrow \underline{\underline{b=0}} \\ f'(-4)=0 \Rightarrow 3\cdot(-4)^2+2a\cdot(-4)=0 \;;\; 48-8a=0 \;;\; \underline{\underline{a=6}} \end{cases}$$

Sustituyendo los valores obtenidos de a y b en (1), resulta:

$a+b+c=0 \Rightarrow 6+0+c=0$;; $\underline{\underline{c=-6}}$

La función resultante es la siguiente:

$$\underline{\underline{f(x)=x^3+6x^2-6}}$$

****

EJERCICIO B

1º) Dado el sistema: $\begin{cases} x+y+z=\lambda \\ 2x+3y+5z=2 \\ 3x+5y+\lambda^2 z=1 \end{cases}$, dependiente del parámetro λ, se pide:

a) Determinar para qué valores de λ el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.

b) Obtener el conjunto S de las soluciones del sistema para el caso compatible indeterminado.

c) Obtener el vector $\overrightarrow{u}$ de S ortogonal (perpendicular) al vector $\overrightarrow{v}=(1,\ 1,\ 2)$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & \lambda_2 \end{pmatrix} \;\;;;\;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & \lambda_2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\,M\,|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & \lambda_2 \end{vmatrix}=3\lambda^2+10+15-9-25-2\lambda^2=\lambda^2-9=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \underline{\lambda_1=3} \\ \underline{\lambda_2=-3} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix} \lambda\neq 1 \\ \lambda\neq 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ \ M=Rango\ \ M'=3=n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Determinado}}$$

$$Para\ \ \underline{\lambda=3}\ \ la\ \ matriz\ \ de\ \ coeficientes\ \ es\ \ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad El\ \ rango\ \ de\ \ M'\ \ es:$$

$$\left.\begin{array}{l} M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}=3+30+6-27-10-2=39-39=0 \\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix}=5+54+6-45-18-2=65-65=0 \\ M' \Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix}=5+81+10-75-18-3=96-96=0 \end{array}\right\} \Rightarrow Rango\ M'=2$$

$$\underline{\underline{Para\ \ \lambda=3 \Rightarrow Rango\ \ M=Rango\ \ M'=2<n^o\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Indeterminado}}$$

$Para\ \ \underline{\lambda=-3}\ \ la\ \ matriz\ \ de\ \ coeficientes\ \ es\ \ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}\quad El\ \ rango\ \ de\ \ M'\ \ es:$

$$M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3-30+6+27-10-2=36-42=-6\neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ \lambda=-3 \Rightarrow Rango\ \ M \neq Rango\ \ M' \Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Resolvemos para $\lambda=3$. El sistema resulta ser $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y+5z=2 \\ 3x+5y+9z=1 \end{cases}$.

Despreciando la última ecuación y parametrizando la variable z:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ 2x+3y+5z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=3-\lambda \\ 2x+3y=2-5\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -2x-2y=-6+2\lambda \\ 2x+3y=2-5\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=-4-3\lambda}$$

$$x+y=3-\lambda\ \ ;;\ \ x-4-3\lambda=3-\lambda\ \ ;;\ \ \underline{x=7+2\lambda}$$

$$\underline{\underline{Solución:\ \begin{cases} x=7+2\lambda \\ y=-4-3\lambda \quad \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

c)

Los vectores de S son de la forma $\overrightarrow{u}=(7+2\lambda,\ -4-3\lambda,\ \lambda)$.

Si los vectores $\overrightarrow{u}=(7+2\lambda,\ -4-3\lambda,\ \lambda)\ y\ \overrightarrow{v}=(1,\ 1,\ 2)$ son perpendiculares tiene que ser:

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0\ \ ;;\ \ (7+2\lambda,\ -4-3\lambda,\ \lambda)\cdot(1,\ 1,\ 2)=0\ \ ;;\ \ 7+2\lambda-4-3\lambda+2\lambda\ \ ;;\ \ \underline{\lambda=-3}$$

$$\overrightarrow{u}=(1,\ 5,\ -3)$$

****

2º) Dado el plano definido por la ecuación $\pi \equiv 8x - 4y + z = 3$, hallar:

a) La ecuación de la recta perpendicular al plano π que pase por el punto P(1, -3, 7), expresada como la intersección de dos planos.

b) La distancia del punto P al plano π.

c) Las ecuaciones de los planos que distan 3 unidades del plano π.

----

a)

La recta r tiene como vector director a cualquier vector normal al plano π, por ejemplo $\overrightarrow{n} = (8,\ -4,\ 1)$.

La ecuación vectorial de r es la siguiente: $r(P;\ \overrightarrow{n}) \equiv (x,\ y,\ z) = (1,\ -3,\ 7) + \lambda(8,\ -4,\ 1)$.

Una expresión de r como intersección de dos planos es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x-1}{8} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-7}{1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} -4x + 4 = 8y + 24 \\ x - 1 = 8z - 56 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x + 2y + 5 = 0 \\ x - 8z + 55 = 0 \end{cases}}}.$$

b)

La distancia de un punto a un plano es: $d(P;\ \pi) = \frac{|\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\ |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto P(1, -3, 7) y al plano $\pi \equiv 8x - 4y + z - 3 = 0$:

$$d(P;\ \pi) = \frac{|8 \cdot 1 - 4 \cdot (-3) + 1 \cdot 7 - 3|}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{|8 + 12 + 7 - 3|}{\sqrt{81}} = \frac{24}{9} = \underline{\underline{\frac{8}{3}\ unidades = d(P;\ \pi)}}$$

c)

El haz de planos paralelos a π tienen el mismo vector normal, por lo tanto, son de la forma $\pi' \equiv 8x - 4y + z + D = 0$; de este conjunto de planos, dos de ellos distan 3 unidades del plano π. Para determinarlos razonamos como sigue:

Sea un punto genérico $Q(a,\ b,\ c)$ perteneciente a π'. La distancia de Q al plano π, por condición del problema, es de 3 unidades, por tanto:

$$d(Q;\ \pi) = \frac{|8a - 4b + c - 3|}{9} = 3\ ;;\ |8a - 4b + c - 3| = 27 \qquad (*)$$

Si el punto Q pertenece a π' tiene que ser $8a - 4b + c = -D$; sustituyendo en (*):

$$\left| -D-3 \right| = 27 \;\Rightarrow\; \begin{cases} D+3=27 \;\;;;\;\; D_1 = 24 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{\underline{\pi_1 \equiv 8x-4y+z+24=0}} \\ \\ -D-3=27 \;\;;;\;\; D_2 = -30 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{\underline{\pi_2 \equiv 8x-4y+z-30=0}} \end{cases}$$

****

3º) Un agente comercial consigue, por término medio, vender sus productos al 40 % de los clientes que visita. Selecciona al azar cinco de sus clientes para visitarlos cierto día. Averiguar razonadamente:

a) La probabilidad de que no venda sus productos a ninguno de esos cinco clientes.

b) La probabilidad de que venda sus productos sólo a dos de esos cinco clientes.

c) La probabilidad de que venda sus productos sólo a cuatro de esos cinco clientes.

Se trata de una probabilidad de una distribución binomial discreta, donde p = 0'4 es la probabilidad de vender el producto y q = 0'6 es la probabilidad de no vender el producto.

La fórmula de la probabilidad binomial de un fenómeno que se repite n veces, de las cuales se produce k veces el suceso es: $P(X=k)=f(k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$, sería:

a)

$$P(x=0)=f(0)=\binom{5}{0}\cdot p^0\cdot q^5=\binom{5}{0}\cdot 0'4^0\cdot 0'6^5=1\cdot 1\cdot 0'116=\underline{\underline{0'07776=P(x=0)}}$$

b)

$$P(x=2)=f(2)=\binom{5}{2}\cdot p^2\cdot q^3=\binom{5}{2}\cdot 0'4^2\cdot 0'6^3=\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 0'16\cdot 0'216=\frac{5\cdot 4}{2}\cdot 0'0346=$$

$$=\underline{\underline{0'3456=P(x=2)}}$$

c)

$$P(x=4)=f(4)=\binom{5}{4}\cdot 0'4^4\cdot q^1=\binom{5}{4}\cdot 0'4^4\cdot 0'6=5\cdot 0'0216\cdot 0'6=\underline{\underline{0'0768=P(x=4)}}$$

****

4º) Calcular, razonadamente, el área de la región limitada por las curvas $y = \frac{2}{1+x^2}$ e $y = x^2$.

Las dos funciones son pares, por lo tanto, simétricas con respecto al eje Y.

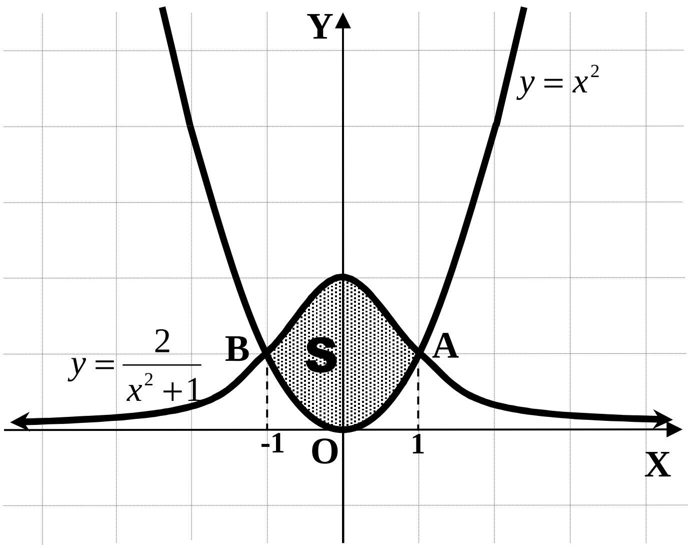
Los puntos de corte de las dos curvas son:

$$x^2 = \frac{2}{x^2+1} \;;;\; x^4 + x^2 - 2 = 0 \;;;\; x^2 = y \;;;\; y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

$$x = \pm\sqrt{y} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \;\rightarrow\; \underline{A\left(\sqrt{2},\, 2\right)} \\ x_2 = -\sqrt{2} \;\rightarrow\; \underline{B\left(-\sqrt{2},\, 2\right)} \end{cases} \\ x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow x \notin R \end{cases}$$

La función $y = \frac{2}{x^2+1}$ corta al eje Y en el punto P(0, 2), que es su máximo absoluto; no corta al eje X y tiene a este eje como asíntota horizontal.

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



$$S = 2 \cdot \int_0^1 \frac{2}{x^2+1} \cdot dx - 2 \cdot \int_0^1 x^2 \cdot dx = 2 \cdot \left[2\; arc\; tag\; x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 =$$

$$= 2 \cdot \left[\left(2\; arc\; tag\; 1 - \frac{1}{3} \right) - \left(2\; arc\; tag\; 0 - 0 \right) \right] = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} - 0 \right) = 2 \cdot \frac{3\pi - 2}{6} = \underline{\underline{\frac{3\pi - 2}{3}\; u^2 = S}}$$

****