PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO 2001

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 2 horas

Se elegirá el Ejercicio A o B, del que sólo se harán tres de los cuatro ejercicios propuestos.

Cada problema se puntuará de 0 a 3'3. La suma de las puntuaciones más 0'1 será la calificación final de esta prueba.

Cada estudiante deberá disponer de una calculadora científica o gráfica para el examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria)

EJERCICIO A

1º) Encontrad razonadamente las ecuaciones de los dos planos paralelos al plano π de ecuación $\pi \equiv 12x + 3y - 4z = 7$ que disten 6 unidades de π.

La expresión general del plano π es: $\pi \equiv 12x + 3y - 4z - 7 = 0$.

Todos los planos paralelos a π, o sea, el haz de planos paralelos a π tiene por ecuación: $12x + 3y - 4z + D = 0$.

Sabiendo que la distancia entre dos planos paralelos es: $d = \dfrac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, será:

$$d = \frac{|D+7|}{\sqrt{12^2 + 3^2 + (-4)^2}} = 6 \;;;\; \frac{|D+7|}{\sqrt{144+9+16}} = 6 \;;;\; \frac{|D+7|}{\sqrt{169}} = 6 \;;;\; \frac{|D+7|}{13} = 6 \;;;$$

$$|D+7| = 6 \cdot 13 = 78 \Rightarrow \begin{cases} D_1 + 7 = 78 \;;;\; D_1 = 78 - 7 = \underline{71 = D_1} \\ -D_2 - 7 = 78 \;;;\; D_2 = -78 - 7 = \underline{-85 = D_2} \end{cases}$$

Los planos pedidos son:

$$\underline{\underline{\pi_1 \equiv 12x + 3y - 4z + 71 = 0}} \;\; y \;\; \underline{\underline{\pi_2 \equiv 12x + 3y - 4z - 85 = 0}}$$

****

2º) El peso de los paquetes de harina que produce cierta fábrica sigue una distribución de media 105 grs y desviación típica 5 grs. Calcular el porcentaje de paquetes con peso superior a 112 grs, explicando cómo se ha obtenido el resultado.

Si se toma al azar un paquete entre los que pesan más de 112 grs, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 115 grs?

Nota: Hay bastante con dividir los casos favorables entre los casos posibles, o bien dividir el porcentaje de casos favorables entre el porcentaje de casos posibles.

Lo primero que hacemos es tipificar la variable para el valor 112 grs en la distribución normal N(105, 5), con lo cual se tiene:

$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{112 - 105}{5} = \frac{7}{5} = \underline{1'4 = z}$. Utilizando la tabla de distribución típica se tiene:

$$p(x > 112) = p(z > 1'4) = 1 - p(z \leq 1'4) = 1 - 0'9192 = \underline{\underline{0'0808 = 8'08\ \% = p(x > 112)}}$$

Tipificando ahora el valor 115 de la variable x se tiene:

$z' = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{115 - 105}{5} = \frac{10}{5} = \underline{2 = z'}$. Utilizando de nuevo la tabla de distribución típica:

$$p(x > 115) = p(z' > 2) = 1 - p(z' \leq 2) = 1 - 0'9772 = \underline{0'0228 = 2'28\ \% = p(x > 115)}$$

Aplicando la Regla de Laplace, la probabilidad pedida es:

$$p = \frac{casos\ \ favorables}{casos\ \ posibles} = \frac{0'0228}{0'0808} = \frac{228}{808} = \underline{\underline{0'2822 = 28'22\ \% = p}}$$

****

3º) a) Con la inversa de la matriz $M=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, resolved el sistema $\left.\begin{matrix}2x+3y=8\\ 4x+2y=8\end{matrix}\right\}$.

b) Obtened razonadamente la matriz inversa de una matriz cuadrada de orden 3, sabiendo que $A^2+A=I$, siendo $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

---

a)

En primer lugar determinamos la matriz inversa de $M=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$:

Sea $M^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$: $\quad M\cdot M^{-1}=I \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+3c & 2b+3d\\ 4a+2c & 4b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases}\left.\begin{matrix}2a+3c=1\\ 4a+2c=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}2a+3c=1\\ -2a-c=0\end{matrix}\right\} \quad 2c=1\ ;;\ \underline{c=\frac{1}{2}}\ ;;\ 4a+2c=0\ ;;\ 4a=-1\ ;;\ \underline{a=-\frac{1}{4}}\\ \\ \left.\begin{matrix}2b+3d=0\\ 4b+2d=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}4b+6d=0\\ -4b-2d=-1\end{matrix}\right\} \quad 4d=-1\ ;;\ \underline{d=-\frac{1}{4}}\ ;;\ 4b+2d=1\ ;;\ 4b=\frac{3}{2}\ ;;\ \underline{b=\frac{3}{8}}\end{cases}$$

$$\underline{M^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{3}{8}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}}$$

Expresando el sistema en forma matricial: M · X = B, siendo $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}8\\ 8\end{pmatrix}$.

Multiplicando por la izquierda por M^{-1}, queda:

$$M^{-1}\cdot(M\cdot X)=M^{-1}\cdot B\ ;;\ M^{-1}\cdot M\cdot X=I\cdot X=M^{-1}\cdot B\ ;;\ X=M^{-1}\cdot B\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{3}{8}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+3\\ 4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{x=1}}\ ;;\ \underline{\underline{y=2}}$$

b)

Naturalmente hemos de suponer que A es inversible.

$A^2+A=I=A\cdot A^{-1}$. Sacando factor común A, queda: $A(A+I)=A\cdot A^{-1}\Rightarrow \underline{\underline{A^{-1}=A+I}}$.

Suponiendo que $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, sería:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} a_{11}+1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+1 \end{pmatrix}=A^{-1}}}$$

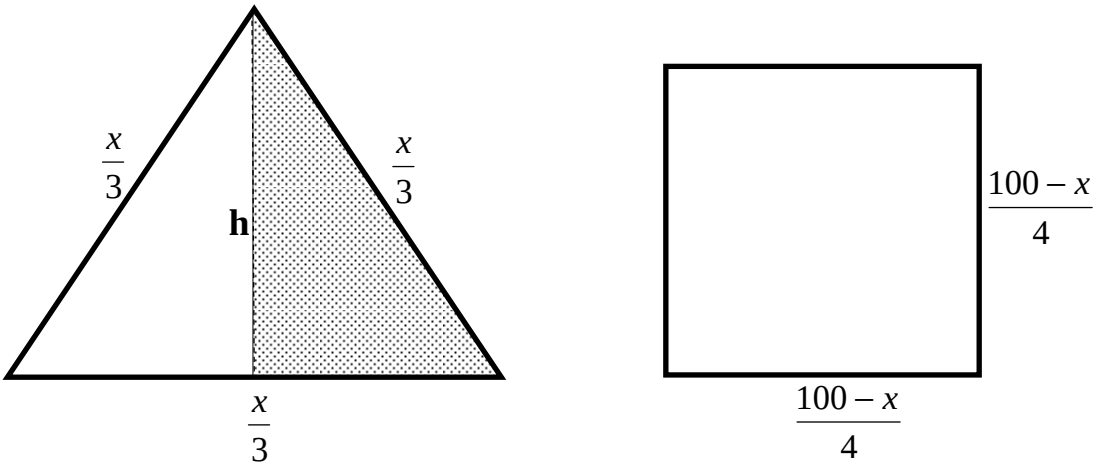
****

4º) Se divide un alambre de 100 metros de longitud en dos segmentos de longitudes x y 100 – x. Con el de longitud x se forma un triángulo equilátero y con el otro un cuadrado. Sea f(x) la suma de las áreas del triángulo y el cuadrado.

a) Determinad el dominio de la función f, es decir, los valores que puede tomar.

b) Con el estudio de la derivada de f, determinad cuándo f es creciente y cuando es decreciente.

c) Indicad razonadamente para qué valor de x se obtiene que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado es mínima.



a)

$$h=\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-\left(\frac{x}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{x^2}{9}-\frac{x^2}{36}}=\sqrt{\frac{4x^2-x^2}{36}}=\sqrt{\frac{3x^2}{36}}=\underline{\frac{\sqrt{3}\ x}{6}=h}$$

$$f(x)=S_{triángulo}+S_{cuadrado}=\frac{\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}\ x}{6}}{2}+\left(\frac{100-x}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{3}\ x^2}{36}+\frac{10000-200x+x^2}{16}=$$

$$=\frac{4\sqrt{3}\ x^2+90000-1800x+9x^2}{2^4\cdot 3^2}=\underline{\frac{\left(4\sqrt{3}+9\right)x^2-1800x+90000}{144}=f(x)}$$

Por tratarse de una función polinómica, su dominio teórico es R; sin embargo, en el caso que nos ocupa, su dominio lógico es el siguiente: $\underline{\underline{D(f)\Rightarrow(0,\ 100)}}$.

Nota: Se excluyen los valores 0 y 100 por no cumplir las condiciones del problema, es decir, no habría un triángulo y un cuadrado.

b)

$$f''(x)=\frac{4\sqrt{3}+9}{72}x-\frac{1800}{144}=\underline{\frac{4\sqrt{3}+9}{72}x-\frac{25}{2}=}\quad\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow\frac{4\sqrt{3}+9}{72}x-\frac{25}{2}=0\ ;;$$

$$\frac{4\sqrt{3}+9}{72}x=\frac{25}{2}\ ;;\ x=\frac{25\cdot 72}{2\left(4\sqrt{3}+9\right)}=\underline{\frac{900}{4\sqrt{3}+9}=x}$$

$$\underline{\underline{f'(x)>0\ \Rightarrow\ x>\frac{900}{4\sqrt{3}+9}\ ;;\ x>56'50\ metros\ \Rightarrow\ Creciente}}$$

$$\underline{\underline{f'(x)<0\ \Rightarrow\ x<\frac{900}{4\sqrt{3}+9}\ ;;\ x<56'50\ metros\ \Rightarrow\ Decreciente}}$$

c)

$$f'(x)=\frac{4\sqrt{3}+9}{72}x-\frac{1800}{144}=\underline{\frac{4\sqrt{3}+9}{72}x-\frac{25}{2}}\quad\Rightarrow\underline{f''(x)=\frac{4\sqrt{3}+9}{72}>0}\ \Rightarrow\ \underline{Mínimo}$$

La función tiene un mínimo relativo para el valor que anula la primera derivada, es decir:

<u>La suma de las áreas es mínima para x = 56’50 metros.</u>

****

EJERCICIO B

1º) Sea f la función definida por $f(x)=\begin{cases} 4 & si\ -3\le x\le 3 \\ 7-x & si\ 3<x\le 7 \end{cases}$. Justificad si f(x) es derivable o no en x = 3. ¿Cuál es el significado geométrico del resultado?

Es condición necesaria que una función sea continua en un punto para que pueda ser derivable en ese punto.

Para que sea continua para x = 3 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3} 4= f(3)=\underline{4} \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(7-x)=7-3=\underline{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \underline{\text{La función es continua para x = 3.}}$$

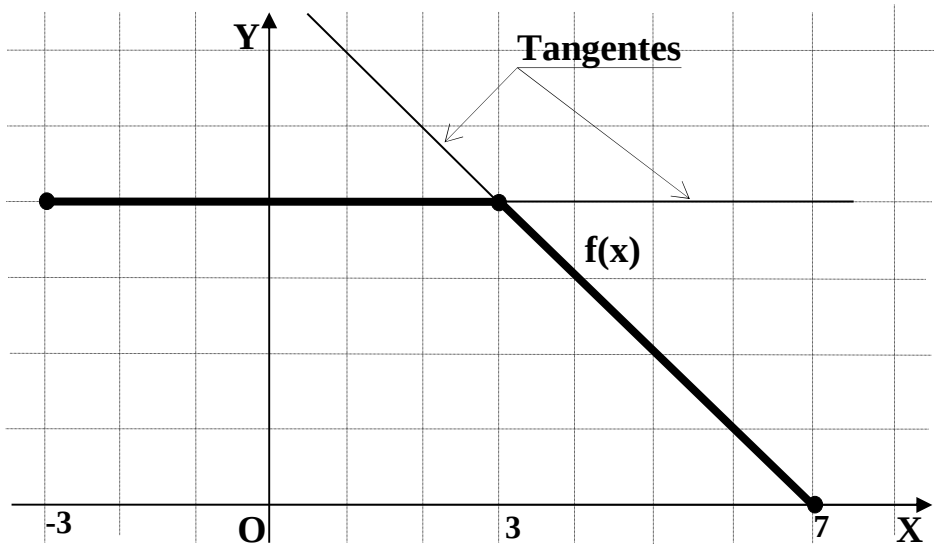
Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} 0 & si\ -3\le x\le 3 \\ -1 & si\ 3<x\le 7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underline{f'(3^-)=0\neq f'(3^+)=-1}$$

<u>La función no es derivable en x = 3.</u>

La interpretación gráfica es que las tangentes a la función para x = 3 son diferentes por la izquierda y por la derecha.

La situación real es la siguiente:



****

2º) Calculad el vector $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que verifique AX + B = C, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \; y \; C = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot X + B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \; ;; \; \begin{pmatrix} x \\ 4x + 2y \\ 6x + 5y + 3z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \; ;;$$

$$\begin{pmatrix} x + 3 \\ 4x + 2y + 7 \\ 6x + 5y + 3z + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + 3 = 4 \\ 4x + 2y = 1 \\ 6x + 5y + 3z = 7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x = 1} \; ;; \; 4 + 2y = 1 \; ;; \; \underline{y = -\frac{3}{2}} \; ;; \; 6 - \frac{15}{2} + 3z = 7 \; ;; \; 3z = \frac{17}{2} \; ;; \; \underline{z = \frac{17}{6}}$$

$$\underline{\underline{\textit{El vector pedido es: } X = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{17}{6} \end{pmatrix}}}$$

****

3º) Tenemos tres urnas cada una de las cuales contiene 2 bolas rojas y 3 negras. Se extrae al azar una bola de cada una y se llama x al número de bolas rojas obtenidas. Calcular la probabilidad de que x sea igual o mayor que 1.

Si cada urna hubiera tenido 5 bolas rojas y 3 negras y se hubiera extraído una bola de cada urna, ¿cuál habría sido la probabilidad de que x hubiera sido mayor o igual que 1? Justificar la respuesta de los resultados obtenidos.

Este problema se puede considerar como una distribución binomial con n = 3 y $p = p(R) = \frac{2}{5}$ y $q = p(No\ R) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, es decir, es equivalente a obtener bola roja con restitución de una sola urna repitiendo el proceso tres veces.

Aplicando la fórmula de la distribución binomial: $p(x \geq a) = \sum_{i=1}^{i=a} \binom{n}{a} \cdot p^{a} \cdot q^{n-a}$.

En el caso que nos ocupa es más sencillo resolverlo por el “suceso contrario”, es decir, determinar la probabilidad de no obtener ninguna bola roja:

$$p = p(x \geq 1) = 1 - p(x = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot p^{0} \cdot q^{n-0} = 1 - 1 \cdot 1 \cdot q^{n} = 1 - q^{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{3} = 1 - \frac{3^3}{5^3} = 1 - \frac{27}{125} = \frac{125 - 27}{125} = \underline{\underline{\frac{98}{125} = 0'784 = p}}$$

En la segunda suposición es exactamente igual, con la diferencia de ser las probabilidades las siguientes: $p = p(R) = \frac{5}{8}$ y $q = p(No\ R) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.

$$p = 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^{3} = 1 - \frac{3^3}{8^3} = 1 - \frac{27}{512} = \frac{512 - 27}{512} = \underline{\underline{\frac{485}{512} = 0'947 = p}}$$

Es lógico que la segunda probabilidad sea mayor que la primera, ya que la proporción de bolas rojas es mayor que al principio $\left(\frac{3}{5} < \frac{5}{8}\right)$.

****

4º) Hallar las ecuaciones de las rectas obtenidas al cortar cada uno de los siguientes planos $\pi_1 \equiv x+y+z=3$, $\pi_2 \equiv x-z=0$ y $\pi_3 \equiv y-z=0$ con el plano $\pi_4 \equiv z=0$.

Las rectas pedidas, r_1, r_2 y r_3, son los sistemas que forman, respectivamente, cada uno de los planos dados con π_4, que expresadas por ecuaciones paramétricas son:

$$r_1 \Rightarrow \{\pi_1,\ \pi_4\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y+z=3 \\ z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \underline{y=k} \ \Rightarrow\ r_1 \equiv \begin{cases} x=3-k \\ y=k \\ z=0 \end{cases}$$ (Recta situada en XY)

$$r_2 \Rightarrow \{\pi_2,\ \pi_4\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-z=0 \\ \underline{z=0} \end{matrix}\right\} \rightarrow \underline{y=k}\ ;;\ \underline{x=0} \ \Rightarrow\ r_2 \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=k \\ z=0 \end{cases}$$ (Es el eje OY)

$$r_3 \Rightarrow \{\pi_3,\ \pi_4\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y-z=0 \\ \underline{z=0} \end{matrix}\right\} \rightarrow \underline{x=k}\ ;;\ \underline{y=0} \ \Rightarrow\ r_3 \equiv \begin{cases} x=k \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$ (Es el eje OX)

****