PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

SEPTIEMBRE – 2000

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 2 horas

Se elegirá el Ejercicio A o el B, del que sólo se harán tres de los cuatro ejercicios.

Cada problema se puntuará de 0 a 3’3, según la puntuación máxima indicada en cada apartado. La suma de las puntuaciones mas 0’1 será la calificación de esta prueba.

Cada estudiante deberá disponer de una calculadora científica o gráfica para el examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria).

EJERCICIO A

1º) Calcular el valor de λ por el que tiene infinitas soluciones el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ \lambda x+y=0 \end{array}\right\}$$

Obtener todas las soluciones correspondientes al valor de λ e interpretar geométricamente por qué el sistema tiene infinitas soluciones.

Por tratarse de un sistema homogéneo, para que el sistema tenga infinitas soluciones es necesario que el rango de la matriz de coeficientes sea menor que el número de ecuaciones y de incógnitas, o sea, dos; esto implica que el determinante tiene que ser cero.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix}=-2+\lambda+\lambda-1=2\lambda-3=0 \Rightarrow \underline{\lambda=\frac{3}{2}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ \lambda=\frac{3}{2}\ \ el\ \ sistema\ \ tiene\ \ infinitas\ \ soluciones}}$$

Para $\lambda = \frac{3}{2}$ resulta un sistema compatible indeterminado, por lo cual, para su resolución se puede despreciar una ecuación y resolver el sistema resultante, por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=\mu} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=\mu \\ 2x+y=-\mu \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -x-y=-\mu \\ 2x+y=-\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x=-2\mu}$$

$$x+y=\mu \;\;;;\;\; -2\mu+y=\mu \;\;;;\;\; \underline{y=3\mu}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=-2\mu \\ y=3\mu \qquad \forall\mu\in R \\ z=\mu \end{cases}}}$$

La explicación geométrica es la siguiente: cada una de las ecuaciones representa a un plano; los dos primeros planos son secantes y, si $\lambda = \frac{3}{2}$, el tercer plano es una combinación lineal de los dos primeros, lo cual significa que pertenece al haz de planos que determinan los dos primeros, es decir: que tienen una recta en común, por lo tanto tienen infinitos puntos en común, que son las infinitas soluciones.

****

2º) Se lanzan cinco monedas simétricas al aire. Calcular:

a) La probabilidad de no obtener ninguna cara.

b) La probabilidad de obtener una cara.

c) La probabilidad de obtener más de una cara.

Se trata de una distribución binomial, siendo p la probabilidad de cara y q la probabilidad de cruz; en este caso $p = q = \frac{1}{2}$.

$$a\ ) \quad p_0 = \binom{5}{0} \cdot p^0 \cdot q^5 = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{32} = \underline{\underline{\frac{1}{32} = 0'031 = p_0}}$$

$$b\ ) \quad p_1 = \binom{5}{1} \cdot p^1 \cdot q^4 = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = \underline{\underline{\frac{5}{32} = 0'156 = p_1}}$$

$$c\ ) \quad p_{>1} = 1 - (p_0 + p_1) = 1 - (0'031 + 0'156) = 1 - 0'188 = \underline{\underline{0'813 = p_{>1}}}$$

****

3º) Se consideran las rectas $r \equiv x = y = z$ y $r' \equiv \begin{cases} y = 5 \\ z = 0 \end{cases}$. Comprobar que los puntos $O(0,\ 0,\ 0)$ y $A(1,\ 1,\ 1)$ pertenecen a la recta r, y que los puntos $B(0,\ 5,\ 0)$ y $C(10,\ 5,\ 0)$ pertenecen a la recta r'. Calcular la distancia entre las dos rectas.

Explicar la relación entre el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{OA} = (1,\ 1,\ 1)$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{OB}$, el producto vectorial de $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{BC}$ y la distancia entre las recta r y r'.

La comprobación de la pertenencia de los puntos a las rectas es evidente.

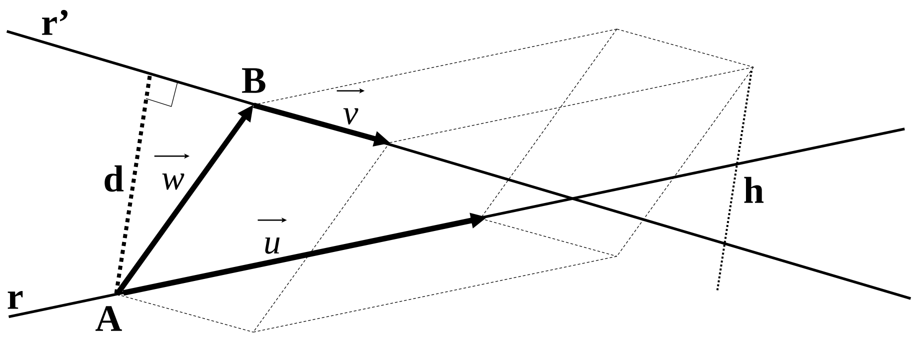
Los vectores directores de las rectas pueden ser:

$$r \Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} = (1,\ 1,\ 1)\ ;;\ s \Rightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC} = C - B = (10,\ 5,\ 0) - (0,\ 5,\ 0) = \underline{(10,\ 0,\ 0) = \overrightarrow{v}}$$

Como las rectas r y r' se cruzan, su distancia es la siguiente:

Se entiende como distancia entre dos rectas que se cruzan, a la menor distancia entre ambas.

Para una mejor comprensión, hacemos un esquema de la situación.



Para calcular la distancia entre las rectas vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas y el vector $\overrightarrow{w}$, cuyo origen es el punto $A \in r$ y como extremo $B \in r'$: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 4,\ -1)$.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observemos que la altura h es igual a la distancia pedida d entre ambas rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right) = \left| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \right| \cdot h = \left| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \right| \cdot d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\left| \overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \right|}$$

$$d = \frac{\left| \overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \right) \right|}{\left| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \right|} = \frac{\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{matrix} \right\|}{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|} = \frac{40+10}{\left| 10j - 10k \right|} = \frac{50}{\left| 10j - 10k \right|} =$$

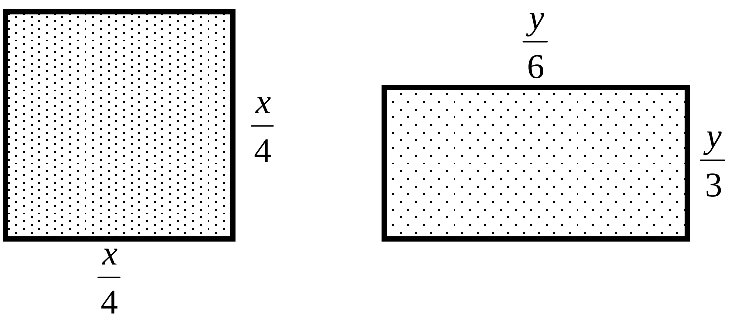
$$= \frac{50}{10 \cdot \left| j - k \right|} = \frac{5}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{2}}{2}\ u = d}}$$

Observando el proceso seguido anteriormente se deduce que el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{OA} = (1,\ 1,\ 1)$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{OB}$ es el volumen del paralelepípedo y el producto vectorial de $\overrightarrow{OA}\ \ y\ \ \overrightarrow{BC}$ es la base del paralelepípedo, siendo d la altura.

La relación es que el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{OA} = (1,\ 1,\ 1)$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{OB}$ dividido por el producto vectorial de $\overrightarrow{OA}\ \ y\ \ \overrightarrow{BC}$ es la distancia entre las recta r y r'.

****

4º) Se divide un hilo de 100 metros en dos trozos de longitudes x e y. Con el trozo de longitud x se forma un cuadrado y con el de longitud y se forma un rectángulo, cuyo lado mayor mide el doble que el lado menor. Encontrar x e y para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea máxima. Idem para que sea mínima.



$$x + y = 100 \;\;;;\;\; \underline{y = 100 - x}$$

$$S_T = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{y}{6} \cdot \frac{y}{3} = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{18} = \frac{x^2}{16} + \frac{(100-x)^2}{18} = \frac{9x^2 + 8(10000 - 200x + x^2)}{144} =$$

$$= \frac{9x^2 + 8x^2 + 80000 - 1600x}{144} = \underline{\frac{17x^2 - 1600x + 80000}{144} = S_T}$$

$$S'_T = \frac{34x - 1600}{144} = \frac{17x - 800}{72} \Rightarrow S'_T = 0 \Rightarrow \frac{17x - 800}{72} = 0 \;\;;;\;\; 17x - 800 = 0 \;\;;;\;\; \underline{x = \frac{800}{17}}$$

$$S''_T = \frac{17}{72} > 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\textit{La solución obtenida para x es un mínimo}}}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{800}{17}}} \;\;;;\;\; y = 100 - x = 100 - \frac{800}{17} = \frac{1700 - 800}{17} = \underline{\underline{\frac{900}{17} = y}}$$

No existe solución para que el área se máxima, lo cual se interpreta que se obtiene sin cortar la cuerda.

****

EJERCICIO B

1º) Obtener la distancia del punto A(0, 0, 7) al plano π determinado por el origen de coordenadas y los puntos B(0, 2, 2) y C(2, 0, 2).

Dos vectores directores de π son $u = \overrightarrow{OB} = (0,\ 2,\ 2)$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OC} = (2,\ 0,\ 2)$, por lo que su ecuación general es la siguiente:

$$\pi(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 4x + 4y - 4z = 0\ ;;\ \underline{\pi \equiv x + y - z = 0}$$

La distancia de un punto a un plano es: $d(P;\ \pi) = \frac{|\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\ |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto A(0, 0, 7) y al plano $\pi \equiv x + y - z = 0$:

$$d(A;\ \pi) = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 7|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-7|}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{7\sqrt{3}}{3}\ unidades = d(A;\ \pi)}}$$

****

2º) Obtener en función de λ las soluciones del sistema $\left.\begin{array}{r} x+y+z=3+\lambda \\ x-3y=-2 \\ -x+3z=2 \end{array}\right\}$. Explicar la relación entre el conjunto de soluciones obtenidas y la intersección de los planos de ecuaciones $\alpha \equiv x-3y=-2$ y $\beta \equiv x+3z=2$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3+\lambda \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-9-3-3=-15\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ de\ \ M=3}$$

$$\underline{\underline{Rango\ \ M=Rango\ \ M'=3=n^{o}\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ \ Deter\min ado,\ \ \forall \lambda \in R}}$$

Resolviendo por la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3+\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-15}=\frac{-9(3+\lambda)+6+6}{-15}=\frac{-27-9\lambda+12}{-15}=\frac{-15-9\lambda}{-15}=\underline{\underline{1+\frac{3}{5}\lambda=x}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3+\lambda & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-15}=\frac{-6+2-2-3(3+\lambda)}{-15}=\frac{-6-9-3\lambda}{-15}=\frac{-15-3\lambda}{-15}=\underline{\underline{1+\frac{1}{5}\lambda=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3+\lambda \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-15}=\frac{-6+2-3(3+\lambda)-2}{-15}=\frac{-6-9-3\lambda}{-15}=\frac{-15-3\lambda}{-15}=\underline{\underline{1+\frac{1}{5}\lambda=z}}$$

La intersección de los planos $\alpha \equiv x-3y=-2$ y $\beta \equiv x+3z=2$ es la recta de ecuación y = z, que puede comprobarse en las soluciones del sistema.

****

3º) La estatura de una población se distribuye normalmente con media de 1’70 m y desviación típica 0’1. Se seleccionan al azar cuatro personas y se pide cuál es la probabilidad de que una, y solo una de ellas mida más de 1’72 m. Determinar también cuál es la probabilidad de que al menos dos de las cuatro personas midan más de 1’72 m.

En primer lugar tipificamos la variable (estatura) X, para lo cual utilizamos la fórmula $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, donde : X = 1’72; μ = 1’70 y σ = 0’1, con lo cual resulta:

$$Z = \frac{1'72 - 1'70}{0'1} = \frac{0'02}{0'1} = 0'2$$

La probabilidad de que una persona mida más de 1’72 es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que mida menos de 1’72, o sea:

$$\underline{p(X \geq 1'72) = 1 - p(Z \leq 0'2) = 1 - 0'5793 = 0'4207}$$

La probabilidad de que seleccionadas al azar cuatro personas, una, y sólo una de ellas mida más de 1’72 m es:

$$p(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot 0'4207^1 \cdot 0'5793^3 = 4 \cdot 0'4207 \cdot 0'1944 = \underline{\underline{0'3271 = p}}$$

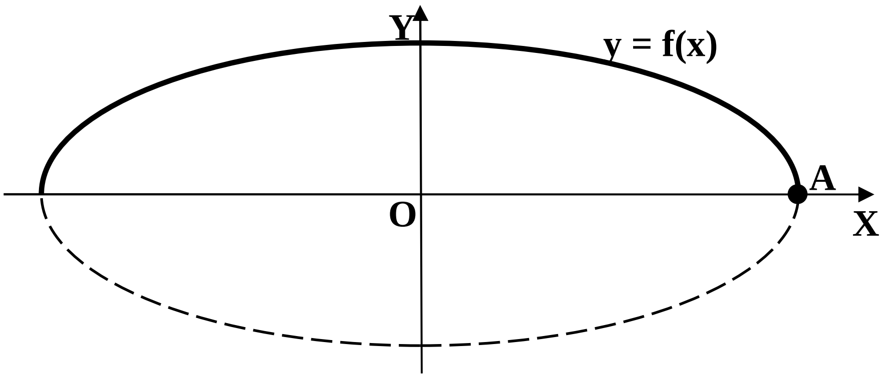
La probabilidad de que al menos dos de las cuatro personas midan más de 1’72 m es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que ninguno o uno de ellos mida menos de 1’72, o sea:

$$p(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot 0'4207^0 \cdot 0'5793^4 = \underline{0'1126}$$

$$p(x \geq 2) = 1 - p(x < 2) = 1 - p(x = 0) - p(x = 1) = 1 - 0'1126 - 0'3271 = \underline{\underline{0'5603}}$$

****

4º) Al girar la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{9}=1$ alrededor del eje OX engendra una superficie que encierra una figura parecida a un huevo, llamada elipsoide. Hallar el volumen de este elipsoide. Si el punto A(a, 0) se desplaza hacia la derecha de manera que $a=5+3t$, obtener la función derivada del volumen del elipsoide respecto a t, explicando su significado.



El volumen que engendra una función continua f(x) que gira en torno al eje OX en un intervalo (a, b) viene dado por la expresión $V=\int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 \cdot dx$. Por ser la función simétrica con respecto al eje Y, en nuestro caso sería: $V=2\cdot\int_0^a \pi \cdot [f(x)]^2 \cdot dx$; teniendo en cuenta que la función es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{9}=1 \;;;\; 9x^2+a^2y^2=9a^2 \Rightarrow y^2=[f(x)]^2=\frac{9a^2-9x^2}{a^2}=\underline{\frac{9}{a^2}\left(a^2-x^2\right)=[f(x)]^2}$$

Sustituyendo este valor en el volumen, resulta:

$$V=2\cdot\int_0^a \pi\cdot[f(x)]^2\cdot dx=2\cdot\int_0^a \pi\cdot\frac{9}{a^2}\cdot\left(a^2-x^2\right)\cdot dx=\frac{18\pi}{a^2}\cdot\int_0^a\left(a^2-x^2\right)\cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=a\cdot sen\ t \\ dx=a\cdot\cos t\cdot dt \end{array}\right\| \left.\begin{array}{c} x=a\rightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ x=0\rightarrow t=0 \end{array}\right\} \Rightarrow V=\frac{18\pi}{a^2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(a^2-a^2\cdot sen^2\ t\right)\cdot a\cdot\cos t\cdot dx=$$

$$=18a\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-sen^2\ t\right)\cdot\cos t\cdot dx=18\pi\cdot\left[\int\cos t\cdot dt-\int sen^2\ t\cdot\cos t\cdot dt\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=18a\pi\cdot\left[sen\ t-\frac{1}{3}sen^3\ t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=18a\pi\cdot\left[\left(sen\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}sen^3\frac{\pi}{2}\right)-\left(sen\ 0-\frac{1}{3}sen^3\ 0\right)\right]=$$

$$=18a\pi\left[\left(1-\frac{1}{3}\cdot 1^3\right)-\left(0-\frac{1}{3}\cdot 0\right)\right]=18a\pi\left(1-\frac{1}{3}-0\right)=18a\pi\cdot\frac{2}{3}=\underline{\underline{12\,a\,\pi\ u^3=V}}$$

Siendo $V = 12 a \pi$, haciendo $a = 5 + 3t$, resulta: $V_t = 12\pi(5+3t)$, y su derivada:

$$V_t' = 12\pi \cdot 3 = \underline{\underline{36\pi = Constante = V_t'}}$$

La interpretación geométrica es que aunque se desplace la figura el volumen es constante.

****