PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) Considere la función $f(x) = sen^2 x$ (tenga en cuenta que el ángulo x se mide en radianes).

a) Estudie los extremos relativos de $f(x)$ en el intervalo $0 < x < \pi$.

b) Estudie los puntos de inflexión de $f(x)$ en el intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

----

a)

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = 2 \cdot sen\, x \cdot \cos x.$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2 \cdot sen\, x \cdot \cos x = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} sen\, x = 0 \to x \notin (0, \pi) \\ \cos x = 0 \to \boldsymbol{x = \frac{\pi}{2}} \end{cases}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f'(x) = 2 \cdot sen\, x \cdot \cos x = sen\,(2x) \;\Rightarrow\; f''(x) = 2 \cdot \cos(2x).$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos \pi = 2 \cdot (-1) = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = \frac{\pi}{2}.$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = sen^2 \frac{\pi}{2} = 1^2 = 1 \;\Rightarrow\; \underline{Máximo: A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)}.$$

b)

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada en ese punto.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \cos(2x) = 0;\ \cos(2x) = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{\pi}{4}}.$$

La condición anterior es necesaria pero no es suficiente; para que exista el punto de inflexión es necesario que no se anule su tercera derivada para el valor que anula la segunda:

$$f'''(x) = -4 \cdot sen\ (2x).$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \cdot sen\ \frac{\pi}{2} = -4 \cdot 1 = -4 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{P.I. para\ x = \frac{\pi}{4}}.$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen^2 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{P.\ I.: B\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)}.$$

****

2º) Calcule una primitiva de $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{-2x}{e-x^2} - 2xe^{1-x^2} + 2x\cos x^2$ que cumpla $F(0) = 1$.

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int \left(\frac{-2x}{e-x^2} - 2xe^{1-x^2} + 2x\cos x^2 \right) \cdot dx =$$

$$= -2 \int \frac{x}{e-x^2} \cdot dx - 2 \int xe^{1-x^2} \cdot dx + 2 \int x\cos x^2 \cdot dx = \boldsymbol{-2A - 2B + 2C = F(x)}.$$

$$A = \int \frac{x}{e-x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} e - x^2 = t \\ xdx = -\frac{1}{2} dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot Lt = \boldsymbol{-\frac{1}{2} L(e - x^2)}.$$

$$B = \int xe^{1-x^2}\, dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 1 - x^2 = t \\ xdx = -\frac{1}{2} dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} \int e^t\, dt = -\frac{1}{2} \cdot e^t = \boldsymbol{-\frac{1}{2} e^{1-x^2}}.$$

$$C = \int x\cos x^2 \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x^2 = t \\ xdx = \frac{1}{2} dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \int \cos t \cdot dt = \frac{1}{2} sen\, t = \boldsymbol{\frac{1}{2} sen\, x^2}.$$

Sustituyendo en la expresión de F los valores obtenidos de A, B y C:

$$F(x) = -2 \cdot \left[-\frac{1}{2} L(e - x^2) \right] - 2 \cdot \left[-\frac{1}{2} e^{1-x^2} \right] + 2 \cdot \frac{1}{2} sen\, x^2 + C =$$

$$= \boldsymbol{L(e - x^2) + e^{1-x^2} + sen\, x^2 + C}.$$

$$F(0) = 1 \Rightarrow L(e - 0) + e^{1-0} + sen\, 0 + C = 1;\ 1 + e + C = 1 \Rightarrow \boldsymbol{C = -e}.$$

La función resulta, finalmente:

$$\underline{F(x) = L(e - x^2) + e^{1-x^2} + sen\, x^2 - e.}$$

****

3º) Discuta, en función del parámetro b, el sistema de ecuaciones $\left.\begin{aligned} 3y+bz=b-2 \\ bx+by=1 \\ -x+z=b-3 \end{aligned}\right\}$, (no es necesario resolverlo en ningún caso).

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & b \\ b & b & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 0 & 3 & b & b-2 \\ b & b & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & b-3 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro b es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 3 & b \\ b & b & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-b^2-3b=0;\ -b(b+3)=0 \Rightarrow \boldsymbol{b_1=0, b_2=-3}.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} b\neq 0 \\ b\neq -3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

Para $b=0 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow (C_1, C_2, C_4) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=-3\neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ A'=3}.$$

Para $b=-3 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & -5 \\ -3 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow (C_1, C_2, C_4) \Rightarrow$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -3 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -6 \end{vmatrix}=-3+15-54=-42\neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ A'=3}.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} b=0 \\ b=-3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A=2;\ Rang\ A'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

****

4º) Considere en R^3 los puntos $A(1,1,-1)$ y $B(0,1,1)$ y los planos $\pi_1 \equiv x+y=0$ y $\pi_2 \equiv x-z=0$.

a) Calcule las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos A y B.

b) Obtenga un punto P de la recta r cuya distancia al plano π_1 sea el doble de su distancia al plano π_2, esto es, $d(P,\pi_1)=2\cdot d(P,\pi_2)$.

----

a)

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{AB}=[B-A]=(-1,0,2)$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{r \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=1 \\ z=-1+2\lambda \end{cases}}$.

b)

Los puntos de la recta r tienen la expresión general: $P(1-\lambda,1,-1+2\lambda)$.

La distancia de un punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ al plano $Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por la fórmula $d(P_0,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

$$d(P,\pi_1)=\frac{|1\cdot(1-\lambda)+1\cdot 1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{|1-\lambda+1|}{\sqrt{1+1+0}}=\frac{|2-\lambda|}{\sqrt{2}}\ unidades.$$

$$d(P,\pi_2)=\frac{|1\cdot(1-\lambda)-1\cdot(-1+2\lambda)|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{|1-\lambda+1-2\lambda|}{\sqrt{1+0+1}}=\frac{|2-3\lambda|}{\sqrt{2}}\ unidades.$$

$$d(P,\pi_1)=2\cdot d(P,\pi_2) \Rightarrow \frac{|2-\lambda|}{\sqrt{2}}=2\cdot\frac{|2-3\lambda|}{\sqrt{2}};\ \ |2-\lambda|=2\cdot|2-3\lambda| \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-\lambda=4-6\lambda \\ 2-\lambda=-4+6\lambda \end{cases} \begin{cases} 5\lambda=2 \to \boldsymbol{\lambda_1=\frac{2}{5}} \\ 7\lambda=6 \to \boldsymbol{\lambda_2=\frac{6}{7}} \end{cases}.$$

$$P_1 \equiv \left\{\begin{array}{l} x=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5} \\ y=1 \\ z=-1+\frac{4}{5}=\frac{-1}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{P_1\left(\frac{3}{5},1,\frac{-1}{5}\right)}.$$

$$P_2 \equiv \left\{\begin{array}{l} x=1-\frac{6}{7}=\frac{1}{7} \\ y=1 \\ z=-1+\frac{12}{7}=\frac{5}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{P_1\left(\frac{1}{7},1,\frac{5}{7}\right)}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Considere la función $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+\alpha & si \;\; x<0 \\ -x^2+\beta x+\beta+1 & si \;\; x\geq 0 \end{cases}$ definida a partir de los parámetros $\alpha,\beta \in R$.

$a)$ Obtenga la relación que debe haber entre $\alpha \; y \; \beta$ para que f sea derivable en x = 0.

$b)$ Para los valores de $\alpha \; y \; \beta$ obtenidos en el apartado $b)$, ¿es f' derivable en x = 0? Razone la respuesta.

$a)$

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función f(x) es continua en la recta real $\forall a,b \in R$, excepto para x = 0, para el cual, se trata de determinar los valores de α y b para que lo sea.

Para que la función sea continua en x = 0 es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2-3x+\alpha)=a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-x^2+\beta x+\beta+1)=f(0)=\beta+1 \end{array}\right\} \Rightarrow a=\beta+1. \quad (*)$$

La función resulta $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=0$, para cuya derivabilidad vamos a determinar los valores de $\alpha \; y \; \beta$.

Una función es derivable en un punto cuando existen sus derivadas laterales en ese punto y además son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 \;\; si \;\; x<0 \\ -2x+\beta \; si \; x\geq 0 \end{cases}.$$

$f'(0^-)=-3. \quad f'(0^+)=\beta \;\; \Rightarrow \;\; f'(0^-)=f'(0^+) \;\; \Rightarrow \;\; \underline{\beta=-3}.$

Sustituyendo en (*) el valor de β: $\alpha=-3+1 \;\; \Rightarrow \;\; \underline{\alpha=-2}.$

$b)$

La función resulta $f(x)=\begin{cases} x^2-3x-2 & si \;\; x<0 \\ -x^2-3x-2 & si \;\; x\geq 0 \end{cases}.$

Por supuesto que es derivable para x = 0; en otro caso el apartado anterior no estaría correctamente hecho: $f'(0^-)=f'(0^+)=-3$.

****

2º) a) Calcule los puntos en los la recta $y = x - 1$ y el eje OX cortan a la parábola de ecuación $y = -x^2 + 6x - 5$.

b) Dibuje, aproximadamente, el recinto plano limitado entre la parábola de ecuación $y = -x^2 + 6x - 5$ y la recta $y = x - 1$.

c) Calcule el área de dicho recinto plano.

----

a)

Las abscisas de los puntos de corte de dos funciones son las soluciones reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$\left.\begin{array}{l} y = -x^2 + 6x - 5 \\ y = x - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2 + 6x - 5 = x - 1;\;\; x^2 - 5x + 4 = 0;$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = 1, x_2 = 4}.$$

Los puntos de corte se deducen fácilmente de la recta: $\underline{A(1, 0)}$ y $\underline{B(4, 3)}$.

b)

La parábola $y = -x^2 + 6x - 5$ es cóncava ($\cap$) y su vértice es el siguiente:

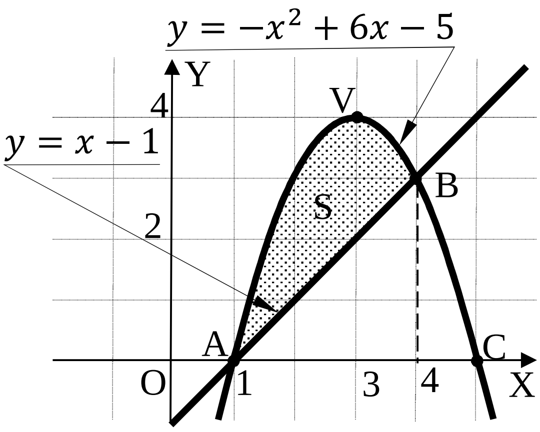
$$y'(x) = -2x + 6. \qquad y'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 6 = 0 \rightarrow x = 3 \Rightarrow V(3, 4).$$

Los puntos de corte con el eje X de la parábola son los siguientes:

$$-x^2 + 6x - 5 = 0;\;\; x^2 - 6x + 5 = 0;\;\; x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} =$$

$$= 3 \pm 2 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = 1, x_2 = 5} \Rightarrow A(1, 0) \text{ y } C(5, 0).$$

La representación gráfica, aproximada, de la situación se indica en la figura adjunta.



$c)$

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S=\int_1^4[(-x^2+6x-5)-(x-1)]\,dx=\int_1^4(-x^2+5x-4)\cdot dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\right]_1^4=\left(-\frac{4^3}{3}+\frac{5\cdot 4^2}{2}-4\cdot 4\right)-\left(-\frac{1^3}{3}+\frac{5\cdot 1^2}{2}-4\cdot 1\right)=$$

$$=-\frac{64}{3}+40-16+\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4=-\frac{63}{3}+28-\frac{5}{2}=-21+28-\frac{5}{2}=7-\frac{5}{2}=\frac{9}{2}.$$

$$\underline{S=\frac{9}{2}\,u^2=4{,}5\,u^2}.$$

****

3º) Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&-1&2\\2&2&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule la matriz $C=2A-B^2$.

$b)$ Halle la inversa A^{-1} de la matriz A.

$a)$

$$C=2A-B^2=2\cdot\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&-1&2\\2&2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&4&-4\\4&-2&4\\4&4&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&0\\-2&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{C=\begin{pmatrix}0&4&-6\\4&-3&4\\6&4&0\end{pmatrix}}.$$

$b)$

La inversa de A se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}$.

$$|A|=\begin{vmatrix}0&2&-2\\2&-1&2\\2&2&0\end{vmatrix}=-8+8-4=-4. \qquad A^t=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&-1&2\\-2&2&0\end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ A^t=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-1&2\\2&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&2\\-2&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&-1\\-2&2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&2\\2&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&2\\-2&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&2\\-2&2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&2\\-1&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&2\\2&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&2\\2&-1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-4&2\\4&4&-4\\6&4&-4\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}-4&-4&2\\4&4&-4\\6&4&-4\end{pmatrix}}{-4}\Rightarrow \underline{A^{-1}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&2&-2\\3&2&-2\end{pmatrix}}.$$

****

4º) Sean en R^3los vectores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 1)$.

$a)$ Calcule el producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

$b)$ Obtenga un vector $\overrightarrow{e_1}$ de R^3 que cumpla cos $\sphericalangle\ (\overrightarrow{e_1}, \vec{u}) = 0$.

$c)$ Obtenga un vector $\overrightarrow{e_2}$ de R^3 que cumpla sen $\sphericalangle\ (\overrightarrow{e_2}, \vec{v}) = 0$.

$a)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i + k - j \ \Rightarrow\ \underline{\vec{u} \times \vec{v} = (1, -1, 1)}.$$

$b)$

Por la definición de producto escalar de dos vectores, siendo α el ángulo que forman:

$$\overrightarrow{e_1} \cdot \vec{u} = |\overrightarrow{e_1}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{e_1} \cdot \vec{u}}{|\overrightarrow{e_1}| \cdot |\vec{u}|} = 0 \ \Rightarrow\ \overrightarrow{e_1} \cdot \vec{u} = 0.$$

Siendo $\overrightarrow{e_1} = (\alpha, \beta, \gamma)\ con\ \alpha, \beta, \gamma \in R$:

$\overrightarrow{e_1} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (1, 1, 0) = \alpha + \beta = 0 \rightarrow \beta = -\alpha.$

El vector $\overrightarrow{e_1}$ es de la forma $\underline{\overrightarrow{e_1} = (\alpha, -\alpha, \gamma), \forall \alpha, \gamma \in R}$.

A modo de ejemplos: $\underline{\overrightarrow{e_{11}} = (1, -1, 0)}$, $\underline{\overrightarrow{e_{12}} = (3, -3, 5)}$ y $\underline{\overrightarrow{e_{13}} = (-2, 2, 0)}$

$c)$

Para que se cumpla que sen $\sphericalangle\ (\overrightarrow{e_2}, \vec{v}) = 0$ es necesario que los vectores $\overrightarrow{e_2}$ y $\vec{v}$ sean paralelos, es decir, que sea 0º el ángulo que forman, por lo cual, sus componentes son proporcionales.

Siendo $\overrightarrow{e_2} = (\delta, \varphi, \mu)\ con\ \delta, \varphi, \mu \in R$: $\underline{\frac{-1}{\delta} = \frac{0}{\varphi} = \frac{1}{\mu}} \ \Rightarrow\ \underline{\delta = -\mu, \varphi = 0}$.

A modo de ejemplos: $\underline{\overrightarrow{e_{21}} = (1, 0, -1)}$, $\underline{\overrightarrow{e_{22}} = (2, 0, -2)}$ y $\underline{\overrightarrow{e_{23}} = (-3, 0, 3)}$.

****