

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA****JULIO – 2016**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) Determine los números reales a y b sabiendo que el sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{array}{l} ax + by + 3z = 2 \\ x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + z = 1 \end{array} \right\} \text{ tiene al menos dos soluciones distintas.}$$

Primera forma:

Si un sistema tiene al menos dos grupos de soluciones es que es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible indeterminado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales y menores que el número de incógnitas.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & b & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función de los parámetros a y b es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & b & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2a - 3 - 3b - 18 - a - b = \mathbf{a - 4b - 21.} \quad (1)$$

Por existir en la matriz M el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ es $\text{Rang } M \geq 2$.

Por ser tres el número de incógnitas, para que el sistema sea compatible indeterminado tiene que ser $\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2$.

$$\begin{aligned}
 \text{Rang } M' = 2 \Rightarrow & \left. \begin{aligned} \{C_1, C_3, C_4\} &\Rightarrow \begin{vmatrix} a & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \{C_2, C_3, C_4\} &\Rightarrow \begin{vmatrix} b & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -a + 2 + 6 - 3 &= 0 \\ -b + 4 - 2 - 6 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \underline{a = 5; b = -4.}
 \end{aligned}$$

Segunda forma:

Sabiendo de antemano que el sistema es compatible indeterminado, se trata de resolverlo.

Para resolver el sistema compatible indeterminado $\begin{cases} ax + by + 3z = 2 \\ x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$ se elimina una de las ecuaciones (primera) y se parametriza una de las incógnitas: $z = \lambda$.

$$\begin{cases} x + 2y = \lambda \\ 3x - y = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = \lambda \\ 6x - 2y = 2 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 7x = 2 - \lambda; \quad x = \frac{2}{7} - \frac{1}{7}\lambda.$$

$$3x - y = 1 - \lambda; \quad y = 3x - 1 + \lambda = \frac{6}{7} - \frac{3}{7}\lambda - 1 + \lambda \Rightarrow y = -\frac{1}{7} + \frac{4}{7}\lambda.$$

Sustituyendo en la primera ecuación los valores obtenidos de x e y:

$$\frac{2a}{7} - \frac{a}{7}\lambda - \frac{b}{7} + \frac{4b}{7}\lambda + 3\lambda = 2; \quad \left(\frac{2a}{7} - \frac{b}{7}\right) + \left(-\frac{a}{7} + \frac{4b}{7} + 3\right)\lambda = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2a}{7} - \frac{b}{7} = 2 \\ -\frac{a}{7} + \frac{4b}{7} + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 14 \\ -a + 4b + 21 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 14 \\ -a + 4b = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 14 \\ -2a + 8b = -42 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7b = -28 \Rightarrow \underline{b = -4.}$$

$$2a - (-4) = 14; \quad 2a + 4 = 14 \Rightarrow \underline{a = 5.}$$

2º) En $\mathbb{R}^3$, sea el plano $\pi \equiv x - z = 2$, y sea r la recta que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(0, 0, b)$.

a) Calcule un vector director de la recta r .

b) Determine b para que r y π sean perpendiculares.

c) Determine b para que r y π sean paralelos.

d) ¿Está r contenida en π para algún valor de b ? Razone la respuesta.

a)

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{BA}$.

$$\overrightarrow{BA} = [A - B] = [(1, 0, 0) - (0, 0, b)] = (1, 0, -b).$$

$$\underline{\overrightarrow{v_r} = (1, 0, -b)}.$$

b)

Un vector perpendicular (normal) del plano π es $\vec{n} = (1, 0, -1)$.

Para que la recta r y el plano π sean perpendiculares es necesario que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean linealmente dependientes, es decir, que sean proporcionales sus componentes:

$$\frac{1}{1} = \frac{0}{0} = \frac{-b}{-1} \Rightarrow 1 = \frac{b}{1} \Rightarrow b = 1.$$

La recta r y el plano π son perpendiculares para $b = 1$.

c)

Para que la recta r y el plano π sean paralelos es necesario que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean perpendiculares.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (1, 0, -b) \cdot (1, 0, -1) = 0; \quad 1 + 0 + b = 0 \Rightarrow b = -1.$$

La recta r y el plano π son paralelos para $b = -1$.

d)

Una forma de resolver el apartado es la siguiente:

Un plano contiene a una recta cuando contiene a dos puntos de la recta.

Los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(0, 0, b)$ pertenecen a la recta r por definición.

Un plano contiene a un punto cuando satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - z = 2 \\ A(1, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 0 \neq 2 \Rightarrow A \notin \pi.$$

La recta r no está contenida en el plano π para ningún valor real de b .

3º) a) Enuncie el teorema de Rolle.

b) Dado un número real λ , utilice el teorema de Rolle para probar que el polinomio $P(x) = x^3 + x + \lambda$ no tiene dos raíces distintas.

c) ¿Tiene el polinomio $P(x) = x^3 + x + \lambda$ alguna raíz? Justifique la respuesta.

a)

El teorema de Rolle dice que “si una función $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c , $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$ ”.

b)

Considerando la función $f(x) = x^3 + x + \lambda$, que por ser polinómica, es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por lo cual, le es aplicable el teorema de Rolle a cualquier intervalo finito que se considere.

$P'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, lo cual implica que $f(x) = x^3 + x + \lambda$ es monótona creciente en $\mathbb{R}$, por lo cual:

El polinomio $P(x)$ no puede tener dos raíces iguales.

c)

Siendo la función $f(x) = x^3 + x + \lambda$ monótona creciente en $\mathbb{R}$, implica, necesariamente, que corta al eje X en algún punto, lo que justifica que:

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ para el cual el polinomio $P(x) = x^3 + x + \lambda$ tiene una raíz real.

4º) Calcule el valor de la integral definida $I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot dx$, donde $a = (e - 1)^2$. [El cálculo de la integral indefinida puede hacerse con el cambio de variable $t = \sqrt{x}$ (es decir, $x = t^2$), o también con el cambio de variable $u = \sqrt{x+1}$].

Primero: con el cambio $t = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} x = a \rightarrow t = \sqrt{a} \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{t+1} \cdot 2t \cdot dt &= 2 \int_0^{\sqrt{a}} \frac{t}{t+1} \cdot dt = 2 \int_0^{\sqrt{a}} \frac{t+1-1}{t+1} \cdot dt = 2 \int_0^{\sqrt{a}} \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) \cdot dt = \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{a}} dt - 2 \int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{t+1} \cdot dt = 2A - 2B. \quad (*) \end{aligned}$$

$$A = \int_0^{\sqrt{a}} dt = [t]_0^{\sqrt{a}} = \sqrt{a} = \sqrt{(e-1)^2} = e - 1.$$

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{t+1} \cdot dt \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t+1 = h \\ dt = dh \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{a} \rightarrow h = \sqrt{a} + 1 \\ t = 0 \rightarrow h = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_1^{\sqrt{a}+1} \frac{1}{h} \cdot dh = \\ &= [Lh]_1^{\sqrt{a}+1} = [L(\sqrt{a} + 1) - L1] = L(\sqrt{a} + 1) = L[\sqrt{(e-1)^2} + 1] = \\ &= L(e - 1 + 1) = Le = 1. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos:

$$I = 2(A - B) = 2(e - 1 - 1) = 2(e - 2).$$

$$\underline{I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot dx = 2(e - 2).}$$

Segundo: con el cambio $u = \sqrt{x} + 1$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{x} + 1 \\ du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \rightarrow dx = 2(u-1)du \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} x = a \rightarrow u = \sqrt{a} + 1 \\ x = 0 \rightarrow u = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_1^{\sqrt{a}+1} \frac{1}{u} \cdot 2(u-1) \cdot du &= 2 \cdot \int_1^{\sqrt{a}+1} \frac{u-1}{u} du = 2 \cdot \int_1^{\sqrt{a}+1} \left(1 - \frac{1}{u} \right) du = \\ &= 2 \cdot \int_1^{\sqrt{a}+1} du - 2 \cdot \int_1^{\sqrt{a}+1} \frac{1}{u} du = 2 \cdot [u]_1^{\sqrt{a}+1} - 2 \cdot [Lu]_1^{\sqrt{a}+1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cdot (\sqrt{a} + 1 - 1) - 2 \cdot [L(\sqrt{a} + 1) - L1] = 2\sqrt{a} - 2[L(\sqrt{a} + 1) - 0] = \\
&= 2 \cdot \sqrt{(e-1)^2} - 2 \cdot L(\sqrt{(e-1)^2} + 1) = 2(e-1) - 2 \cdot L(e-1+1) = \\
&= 2(e-1) - 2 \cdot Le = 2e - 2 - 2 = 2e - 4 = 2(e-2).
\end{aligned}$$

$$\underline{I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot dx = 2(e-2)}.$$

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, obtenga las matrices X que cumplen la igualdad $AX + B^2 - 2A = 0$.

$$AX + B^2 - 2A = 0; \quad AX = 2A - B^2 = M; \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot M;$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot M \Rightarrow X = A^{-1} \cdot M.$$

$$\begin{aligned} M &= 2A - B^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = M. \end{aligned}$$

La matriz A^{-1} se obtiene por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 + F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de X :

$$X = A^{-1} \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}}.$$

2º) En $\mathbb{R}^3$, considere el punto $P(1, 0, 1)$ y los planos $\pi_1 \equiv x + z = 0$, $\pi_2 \equiv y - z = 0$. Obtenga un plano π_3 que cumpla a la vez las siguientes condiciones:
i) $P \in \pi_3$; *ii)* π_1 corta a π_3 en una recta; *iii)* Los planos π_1 , π_2 y π_3 no tienen puntos en común.

Sea el plano pedido $\pi_3 = Ax + By + Cz + D = 0$.

De *i)* $\rightarrow$ Por contener a $P(1, 0, 1) \Rightarrow A + C + D = 0$. (1)

De *ii)* $\rightarrow$ Los planos π_1 y π_3 se cortan en la recta r .

iii) Los planos π_1 , π_2 y π_3 no tienen puntos en común, es decir, que se cortan dos a dos, como se observa en el dibujo que se adjunta.

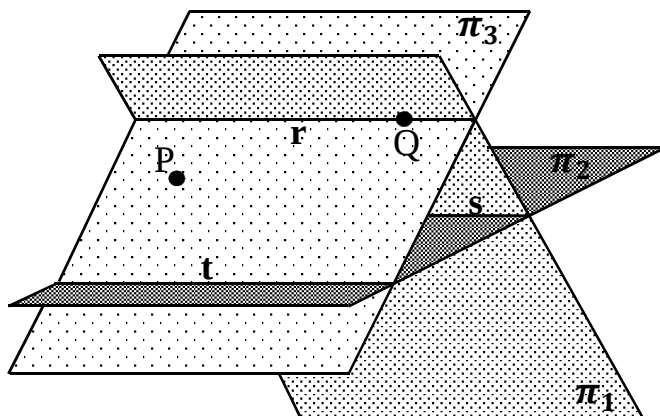
La recta s en que se cortan π_1 y π_2 es $s \equiv \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$.

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$z = \mu; \quad x = -\mu; \quad y = \mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Las rectas r , s y t donde se cortan los planos dos a dos son paralelas.



Un vector director de s es $\vec{v}_s = (-1, 1, 1)$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$z = \lambda; \quad x = -\lambda; \quad -A\lambda + B\lambda + C\lambda = -D; \quad y = \frac{A\lambda - C\lambda - D}{B} = -\frac{D}{B} + \frac{A-C}{B}\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -\frac{D}{B} + \frac{A-C}{B}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}. \quad \text{Un punto de } r \text{ es } Q\left(0, -\frac{D}{B}, 0\right).$$

$$\overrightarrow{QP} = [P - Q] = \left[(1, 0, 1) - \left(0, -\frac{D}{B}, 0\right)\right] = \left(1, \frac{D}{B}, 1\right).$$

Los vectores $\vec{v}_r$ y $\overrightarrow{QP}$ son directores del plano π_3 , que contiene a $P(1, 0, 1)$.

La expresión general del plano π_3 es la siguiente:

$$\pi_3(P; \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{QP}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ B & D & B \end{vmatrix} = 0;$$

$$B(x-1) + By - D(z-1) - B(z-1) - D(x-1) - By = 0;$$

$$Bx - B - Dz + D - Bz + B - Dx + D = 0; \quad Bx - Dz - Bz - Dx + 2D = 0;$$

$$(B-D)x + (-B-D)z + 2D = 0.$$

Teniendo en cuenta que $\pi_3 = Ax + By + Cz + D = 0$, se deduce que $B = 0$, con lo que resulta:

$$\pi_3 \equiv -Dx - Dz + 2D = 0 \Rightarrow \underline{\pi_3 \equiv x + z - 2 = 0}.$$

3º) a) Estudie el dominio, el signo, las asíntotas verticales y las asíntotas horizontales de la función $f(x) = \frac{2x-1}{-x^2+x}$.

b) Utilizando los datos obtenidos en el apartado anterior, represente, aproximadamente, la gráfica de la función $f(x)$.

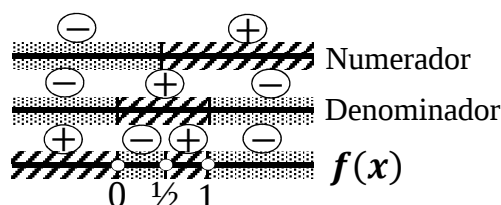
a)

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$-x^2 + x = 0; -x(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{0, 1\}}.$$

Para estudiar el signo de la función tenemos en cuenta, además de las raíces halladas del denominador que la raíz del numerador es $x = \frac{1}{2}$. Además, nos valemos del gráfico adjunto para determinar el signo de la función.



$$\underline{f(x) < 0 \Rightarrow x \in (0, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)}.$$

$$\underline{f(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, 1)}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

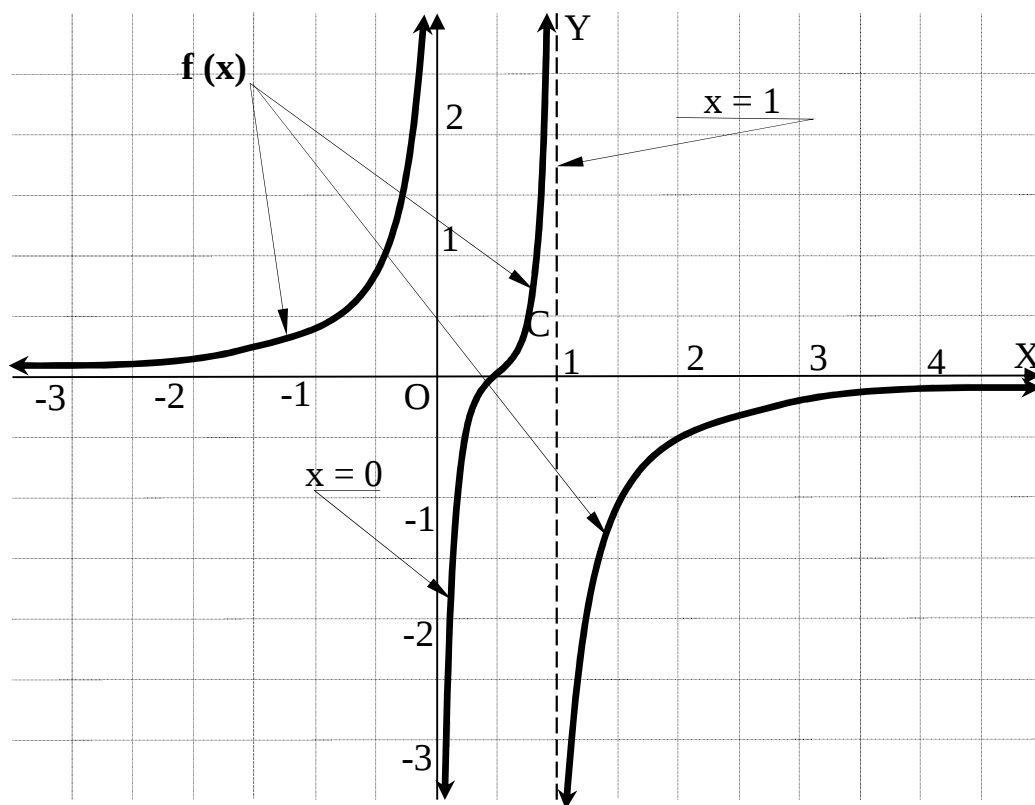
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{-x^2+x} = 0 \Rightarrow \underline{\text{La recta } y = 0 \text{ es asíntota horizontal.}}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{\text{La rectas } x = 0 \text{ y } x = 1 \text{ son asíntotas verticales.}}$$

b)

Utilizando todos los datos obtenidos en el apartado anterior puede hacerse un gráfico bastante aproximado de la función, que es el que sigue:



4º) a) Escriba la “regla de la cadena” para la derivación de funciones compuestas.

b) Calcule la derivada de la función $f(x) = L(\cos^2 x)$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

c) Obtenga, utilizando el apartado b), una primitiva $G(x)$ de la función $g(x) = \operatorname{tg} x$ que cumpla $G(0) = 1$.

a)

La regla de la cadena se utiliza para derivar funciones compuestas, es decir, funciones que son, a la vez, funciones de otras funciones. Si una función es a su vez composición de dos funciones, $(g \circ f)(x) = f[g(x)]$, su derivada es de la siguiente forma y se denomina “regla de la cadena”:

$$\underline{(g \circ f)'(x) = f'[g(x)] = g'[f(x)] \cdot f'(x)}.$$

b)

$$f(x) = L(\cos^2 x) = L[g(x)] \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2 \cdot \cos x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = -\frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

$$\underline{f(x) = L(\cos^2 x) \Rightarrow f'(x) = -2 \operatorname{tg} x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}}.$$

c)

$$f'(x) = -2 \operatorname{tg} x = -2g(x) \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2} \cdot f'(x)$$

$$G(x) = \int g(x) \cdot dx = -\frac{1}{2} \int f'(x) \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot L(\cos^2 x) + C.$$

$$G(0) = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot L(\cos^2 0) + C = 1; -\frac{1}{2} L1 + C = 1; -0 + C = 1 \Rightarrow C = 1.$$

$$\underline{G(x) = -\frac{1}{2} \cdot L(\cos^2 x) + 1}.$$
