

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA****JULIO – 2015**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) a) Enuncie el teorema del valor medio de Lagrange.

b) Aplicando a la función $f(x) = x^3 + 2x$ el anterior teorema, pruebe que cualquiera que sean los números $\alpha < b$ se cumple la desigualdad $\alpha - b < b^3 - a^3$.

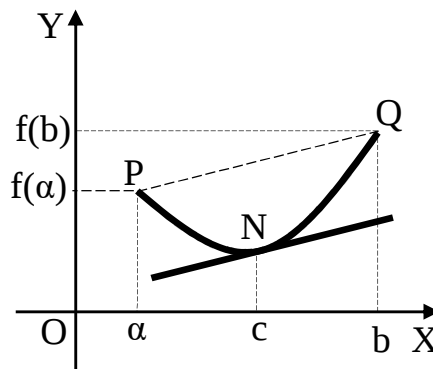
a)

El teorema del valor medio del cálculo diferencial, también conocido como teorema de Lagrange, se puede enunciar del siguiente modo:

“Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[\alpha, b]$ y derivable en (α, b) , entonces, existe al menos un punto $c \in (\alpha, b)$ que cumple $f'(c) = \frac{f(b)-f(\alpha)}{b-a}$.”.

La interpretación geométrica puede apreciarse fácilmente en la figura adjunta.

Considerando la función $f(x)$, continua en $[\alpha, b]$ y derivable en (α, b) existe, por lo menos un punto N perteneciente al intervalo (α, b) en el que la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la cuerda que une los puntos P y Q de coordenadas $P[\alpha, f(\alpha)]$ y $Q[b, f(b)]$.



b)

La función $f(x) = x^3 + 2x$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por lo cual, se le puede aplicar el teorema de Lagrange en cualquier intervalo finito que se considere, por ejemplo, al intervalo (α, b) con $\alpha < b$:

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \Rightarrow f'(c) = 3c^2 + 2.$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow 3c^2 + 2 = \frac{(b^3+2b)-(a^3+2a)}{b-a} = \frac{b^3+2b-a^3-2a}{b-a} =$$

$$= \frac{b^3-a^3+2b-2a}{b-a} = \frac{b^3-a^3}{b-a} + \frac{2(b-a)}{b-a} = \frac{b^3-a^3}{b-a} + 2 \Rightarrow \mathbf{3c^2 = \frac{b^3-a^3}{b-a}}.$$

Como quiera que $3c^2 > 0, \forall c \in R \Rightarrow \frac{b^3-a^3}{b-a} >$ cualquier valor negativo.

Considerando $\frac{b^3-a^3}{b-a} > -1 = -\frac{a-b}{a-b} = \frac{a-b}{b-a} \Rightarrow b^3 - a^3 > a - b$, o sea:

$a - b < b^3 - a^3$, como teníamos que comprobar.

2º) a) Diga cuándo una función $F(x)$ es una primitiva de otra función $f(x)$.

b) Diga cómo puede comprobarse, sin necesidad de hacer derivadas, si dos funciones $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de una misma función.

c) Diga si las funciones $F(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x}$ y $G(x) = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x}$, razonando la respuesta, si son primitivas de una misma función.

a)

Se dice que una función $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ si se cumple que $F'(x) = f(x)$; como quiera que la derivada de $F(x) + C$ es la misma que la de $F(x)$, existen infinitas funciones primitivas de una función dada, que son todas aquellas que se diferencian en una constante (C).

Lo anterior se expresa de la forma: $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$.

b)

Dos funciones $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son primitivas de una función $f(x)$ siempre que la diferencia de las dos primeras sea constante: $F_1(x) - F_2(x) = C$.

c)

$$F(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x} = 1 + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cotg x + 1.$$

$$G(x) = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cotg x.$$

Las funciones $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de una misma función por diferenciarse en una constante (1).

3º) Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial $AX + 2B = C$.

$A \cdot X + 2B = C$; ; $A \cdot X = C - 2B$. Multiplicando por la izquierda por A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - 2B) \quad ; ; \quad I \cdot X = A^{-1} \cdot (C - 2B) \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (C - 2B).$$

$$C - 2B = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(A/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 + F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 + F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow -F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de X:

$$X = A^{-1} \cdot (C - 2B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 2+0 \\ -1-8 & -2-0 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}.$$

4º) a) Calcule las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos A(0, 1, 1) y B(1, 1, -1).

b) Calcule todos los puntos de la recta r que equidistan de los planos $\pi_1 \equiv x + y = -2$ y $\pi_2 \equiv x - z = 1$.

a)

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = B - A = (1, 0, -2)$.

Considerando el punto A, la recta r pedida es $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$.

b)

Los planos π_1 y π_2 tienen los siguientes planos bisectores:

$$\frac{x+y+2}{\pm\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{x-z-1}{\pm\sqrt{1^2+(-1)^2}} \Rightarrow \begin{cases} x+y+2 = x-z-1 \\ x+y+2 = -x+z+1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 \equiv y+z+3=0 \text{ y } \alpha_2 \equiv 2x+y-z+1=0.$$

Los puntos pedidos son los puntos de corte de la recta r con los planos π_1 y π_2 :

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + (1 - 2\lambda) + 3 = 0 \\ 4 + 1 - 2\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{5}{2}.$$

$\alpha_1 \equiv y + z + 3 = 0$

$$P_1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = 1 \\ z = 1 - 5 = -4 \end{cases} \Rightarrow \underline{P_1 \left(\frac{5}{2}, 1, -4 \right)}.$$

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda + 1 - (1 - 2\lambda) + 1 = 0 \\ \alpha_2 \equiv 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$2\lambda + 2 - 1 + 2\lambda = 0 ; ; 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{4}.$$

$$P_2 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = 1 \\ z = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \underline{P_2 \left(-\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2} \right)}.$$

OPCIÓN B

1º) a) Estudie el dominio de definición y las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-2}$.

b) Estudie si la gráfica de la función $f(x)$ corta a alguna asíntota oblicua suya.

c) Represente, aproximadamente, la gráfica de $f(x)$ utilizando los valores $f(1)$ y $f(3)$, y los datos obtenidos en los apartados a) y b).

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es $\mathbb{R}$, excepto los valores de x que anulan el denominador: $D(f) \Rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \infty \Rightarrow \underline{\text{No tiene asíntotas horizontales.}}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow \underline{\text{La recta } x = 2 \text{ es asíntota vertical de la función.}}$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - mx \right].$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2-4x+3}{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x} = 1.$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - mx \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-4x+3}{x-2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4x+3-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x+3}{x-2} = -2 = n. \end{aligned}$$

La recta $y = x - 2$ es asíntota oblicua de la función.

b)

Los puntos de corte de la función con la asíntota oblicua son las soluciones del sistema que forman sus expresiones:

$$\left. \begin{aligned} y &= f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-2} \\ y &= x - 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2-4x+3}{x-2} = x - 2 ; ; x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow$$

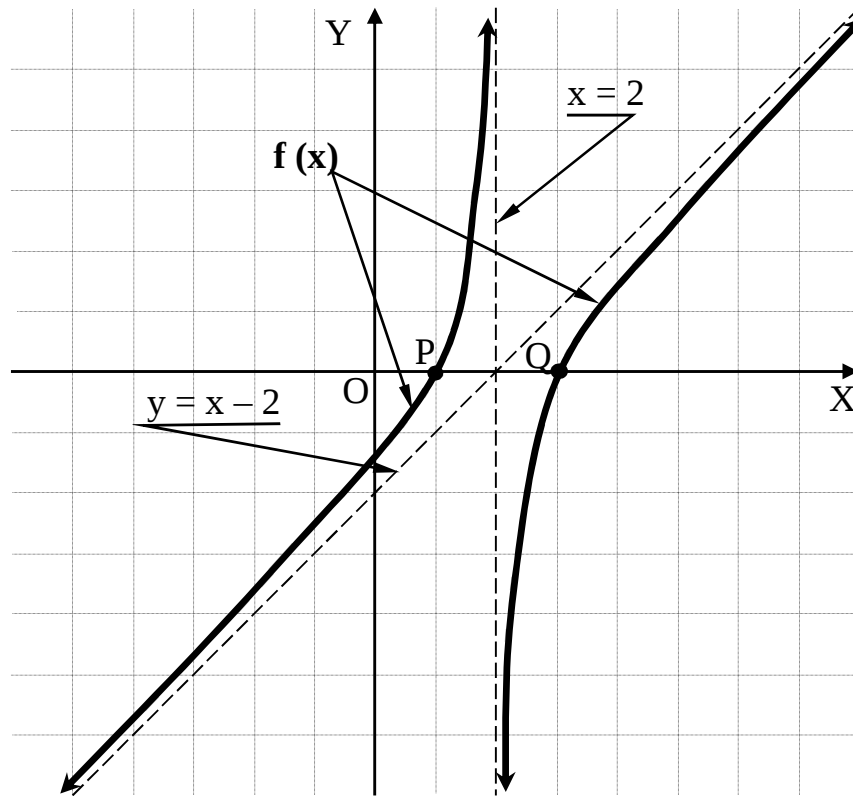
$\Rightarrow 3 = 4 \Rightarrow \text{Incompatible} \Rightarrow \underline{\text{La asíntota oblicua no corta a la función.}}$

c)

$$f(1) = \frac{1-4+3}{1-2} = 0 \Rightarrow \underline{P(1,0)}.$$

$$f(3) = \frac{9-12+3}{3-2} = 0 \Rightarrow \underline{Q(3,0)}.$$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



2º) Calcule la integral definida de una función racional: $I = \int_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}} \frac{x-1}{x^2-2x} \cdot dx$.

Se resuelve en primer lugar la integral indefinida $A = \int \frac{x-1}{x^2-2x} \cdot dx$:

$$A = \int \frac{x-1}{x^2-2x} \cdot dx \Rightarrow \frac{x-1}{x^2-2x} = \frac{x-1}{x(x-2)} = \frac{M}{x} + \frac{N}{x-2} = \frac{Mx-2M+Nx}{x(x-2)} = \frac{(M+N)x-2M}{x(x-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} M+N=1 \\ -2M=-1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow M=N=\frac{1}{2} \Rightarrow A = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2} \right) \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} \right) \cdot dx = \frac{1}{2} [L|x| + L|x-2|] + C.$$

Resolvemos ahora la integral definida:

$$\begin{aligned} I &= \int_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}} \frac{x-1}{x^2-2x} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot [L|x| + L|x-2|]_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{ [L(1+\sqrt{5}) + L(1+\sqrt{5}-2)] - [L(1+\sqrt{2}) + L(1+\sqrt{2}-2)] \} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{ [L(\sqrt{5}+1) + L(\sqrt{5}-1)] - [L(\sqrt{2}+1) + L(\sqrt{2}-1)] \} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{ L[(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)] - L[(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)] \} = \frac{1}{2} \cdot [L(5-1) - L(2-1)] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (L4 - L1) = \frac{1}{2} L \frac{4}{1} = \frac{1}{2} L4 = \frac{1}{2} L2^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot L2 = L2. \end{aligned}$$

$$\underline{I = \int_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}} \frac{x-1}{x^2-2x} \cdot dx = L2.}$$

3º) Determine el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & b+2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ b+1 & 1 & b \end{pmatrix}$, según los valores de b.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & b+2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ b+1 & 1 & b \end{vmatrix} = b+2 + (b+2)(b+1) - (b+1) - 1 - 2b(b+2) =$$

$$= b+1 + b^2 + b + 2b + 2 - b - 1 - 2b^2 - 4b = -b^2 - b + 2 = 0.$$

$$b^2 + b - 2 = 0 ; ; b = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow b_1 = -2, b_2 = 1.$$

$$\underline{Rango\ de\ A = 3, \forall b \in R - \{-2, 1\}.$$

Para $b = -2$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y para $b = 1$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Como en ambos casos existen menores de orden dos distintos de cero, como por ejemplo son: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, respectivamente:

$$\underline{Para\ b = -1\ y\ b = 1 \Rightarrow Rango\ de\ A = 2.}$$

4º) Sean $\vec{e}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $\vec{e} \times \vec{u} = (1, 0, -1)$, $\vec{v} \times \vec{e} = (0, 1, 1)$.

a) Calcule el vector $(\vec{e} \times \vec{u}) \times (\vec{v} \times \vec{e})$.

b) Calcule el vector $\vec{w} = \vec{e} \times (2\vec{u} - \vec{e} + 3\vec{v})$.

a)

$$(\vec{e} \times \vec{u}) \times (\vec{v} \times \vec{e}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k + i - j = i - j + k.$$

$$\underline{(\vec{e} \times \vec{u}) \times (\vec{v} \times \vec{e}) = (1, -1, 1)}.$$

b)

Para la resolución de este apartado deben tenerse en cuenta las siguientes propiedades del producto vectorial:

1ª.- Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma por la izquierda y por la derecha.

2ª.- Los escalares pueden extraerse del producto vectorial.

3ª.- El producto vectorial de un vector por sí mismo es el vector nulo.

4ª.- El producto vectorial es anticonmutativo: $\vec{m} \times \vec{n} = -(\vec{n} \times \vec{m})$.

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{e} \times (2\vec{u} - \vec{e} + 3\vec{v}) = 2 \cdot \vec{e} \times \vec{u} - \vec{e} \times \vec{e} + 3 \cdot \vec{e} \times \vec{v} = \\ &= 2 \cdot (1, 0, -1) - (0, 0, 0) - 3 \cdot \vec{v} \times \vec{e} = (2, 0, -2) - 3 \cdot (0, 1, 1) = \\ &= (2, 0, -2) + (0, -3, -3) = (2, -3, -5). \end{aligned}$$

$$\underline{\vec{w} = (2, -3, -5)}.$$
