PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

SEPTIEMBRE – 2012

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro cuestiones de la opción elegida puntuará 2’5 puntos como máximo. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) a) Calcule el siguiente límite: $\lim_{x \to 0^+} (x \cdot L\,x)$. (L → neperiano).

b) Estudie los extremos relativos, las asíntotas y el signo de la función $f(x) = x \cdot L\,x$ definida en el intervalo abierto (0, +∞).

c) Utilizando los datos obtenidos en los apartados anteriores a) y b), represente de forma aproximada la gráfica de la función f(x) del apartado b).

----

a)

$$\lim_{x \to 0^+} (x \cdot L\,x) = 0 \cdot (-\infty) \Rightarrow Indet. \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{L\,x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x \to 0^+} x = \underline{\underline{0}}.$$

b)

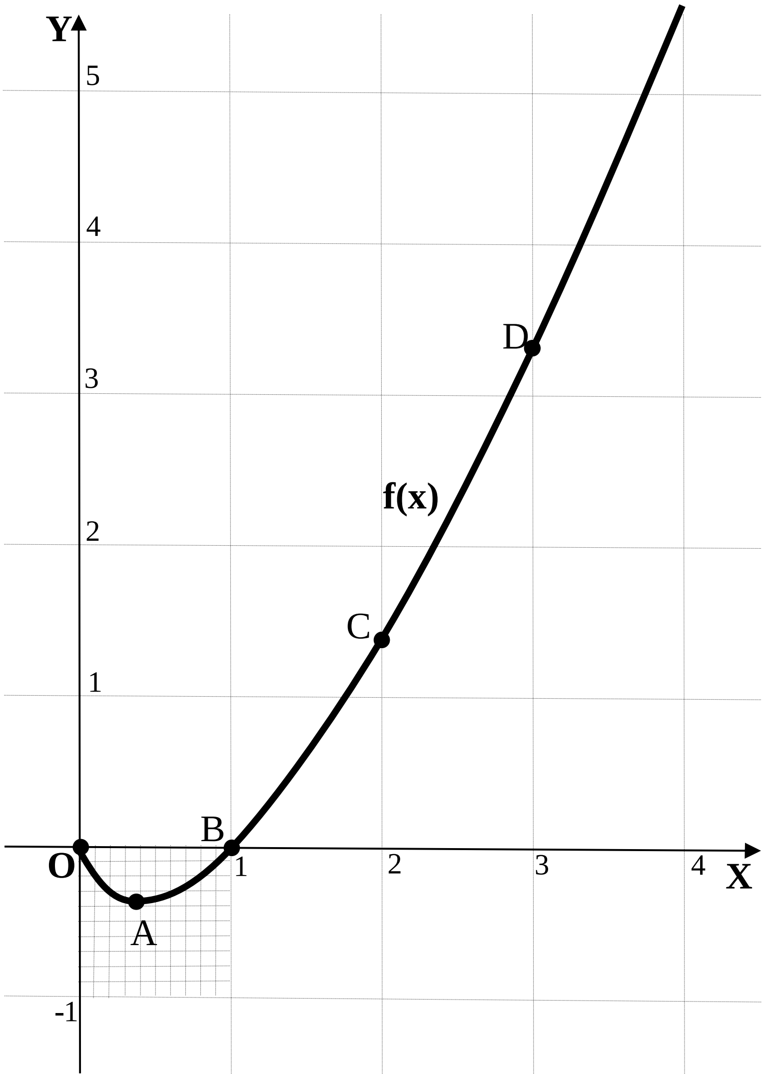
$$f'(x) = 1 \cdot L\,x + x \cdot \frac{1}{x} = L\,x + 1.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow L\,x + 1 = 0 \;;;\; L\,x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \underline{\frac{1}{e} = x}.$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}\ \Rightarrow\ f''(e^{-1})=\frac{1}{e^{-1}}=e>0\ \Rightarrow\ \underline{Mínimo\ \ para\ \ x=\frac{1}{e}}.$$

$$f\left(\tfrac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\cdot L\,\frac{1}{e}=\frac{1}{e}\cdot L\,e^{-1}=-\frac{1}{e}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Mínimo:\ A\left(\frac{1}{e},\ -\frac{1}{e}\right)}}.$$

Teniendo en cuenta que el logaritmo de 1 en cualquier base es 0, el logaritmo neperiano de los valores de $x\in(0,\ 1)$ son negativos y los de $x\in(1,\ +\infty)$ son positivos. Teniendo en cuenta que x > 0, <u>el signo de f(x) es negativo en (0, 1) y positivo en (1, ∞).</u>



Las asíntotas horizontales son los valores finitos de la función cuando x ⟶ +∞.

$$\lim_{x\to+\infty}(x\cdot L\,x)=\infty\cdot\infty=\infty\ \Rightarrow$$

<u>No tiene asíntotas horizontales.</u>

Las asíntotas verticales son los valores finitos de x para los cuales la función vale más o menos infinito. Para x = 0^+ la función vale 0, según apartado a).

<u>La función f(x) no tiene asíntotas verticales.</u>

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y=mx+n$, siendo los valores de m y n los resultados finitos de los siguientes límites:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot L\,x}{x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}L\,x=\infty\ \Rightarrow$$ <u>No tiene asíntotas oblicuas.</u>

Aunque ya no procede: $n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$.

c)

Para facilitar la representación hallamos dos puntos, C(2, 1’39) y D(3, 3’3).

La representación gráfica es la que aparece en la figura.

****

2º) a) Diga cuando la función F(x) es una primitiva de otra función f(x).

b) Haciendo el cambio de variable $t=\sqrt{x-1}$, calcule la primitiva de la siguiente función: $f(x)=x\cdot\sqrt{x-1}$, cuya gráfica pasa por el punto A(1, 0) del plano.

----

a)

La función F(x) es una primitiva de otra función f(x) siempre y cuando se cumpla que la derivada de f(x), f'(x), se diferencie en una constante de F(x).

Por ejemplo: La función $F(x)=3x^2-2x+6$ es una función primitiva de la función $f(x)=x^3-x^2+8x+5$ por ser $f'(x)=3x^2-2x+8$ y $f'(x)=F(x)+2$.

b)

$$F(x)=\int x\cdot\sqrt{x-1}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\sqrt{x-1}=t\rightarrow x=t^2+1\\ dx=2t\cdot dt\end{matrix}\right\} \Rightarrow F(t)=\int\left(t^2+1\right)\cdot t\cdot 2t\cdot dt=$$

$$=2\cdot\int\left(t^4+t^2\right)\cdot dt=2\cdot\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)+C=\frac{2t^3}{15}\left(3t^2+5\right)+C=\frac{2(x-1)\sqrt{x-1}}{15}[3(x-1)+5]+C=$$

$$=\frac{2(x-1)\sqrt{x-1}}{15}(3x-3+5)+C=\underline{\frac{2}{15}(x-1)(3x+2)\sqrt{x-1}+C=F(x)}.$$

Por pasar F(x) por A(1, 0) tiene que cumplirse que F(1) = 0:

$$F(1)=0 \Rightarrow \frac{2}{15}(1-1)(3+2)\sqrt{1-1}+C=0 \Rightarrow \underline{C=0}.$$

$$\underline{\underline{F(x)=\frac{2}{15}(x-1)(3x+2)\sqrt{x-1}}}$$

****

3º) Calcule los valores de α para los que el determinante de la matriz B es igual a 32, siendo $B = 2A^2$ y $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$|B| = |2 \cdot A^2| = 2^3 \cdot |A^2| = 8 \cdot |A^2| = 32 \ ;; \ \underline{|A^2| = 4}.$$

Sabiendo que $|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = (|A|)^2$, puede hacerse lo siguiente:

$$|A|^2 = \begin{vmatrix} a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}^2 = (2a + a - 2)^2 = (3a - 2)^2 = 9a^2 - 12a + 4 = 4 \ ;; \ 9a^2 - 12a = 0 \ ;;$$

$3a(a-4) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a_1 = 0}} \ ;; \ \underline{\underline{a_2 = 4}}$.

****

4º) Dados el plano $\pi \equiv x + z = 1$ y los puntos A(1, 0, 0) y B(0, 1, 0), calcule los valores de c para los que el punto P(0, 0, c) cumple "área del triángulo ABP" = "distancia de P a π".

Los puntos A, B y P determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PA} = A - P = (1,\ 0,\ 0) - (0,\ 0,\ c) = (1,\ 0,\ -c).$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PB} = B - P = (0,\ 1,\ 0) - (0,\ 0,\ 1) = (0,\ 1,\ -1).$$

El área del triángulo que determinan tres puntos es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores $\overrightarrow{u} = (1,\ 0,\ -c)$ y $\overrightarrow{v} = (0,\ 1,\ -1)$:

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \left| k - ci + j \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| -ci + j + k \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| -c,\ 1,\ 1 \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-c)^2 + 1^2 + 1^2} = \underline{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{c^2 + 2} = S_{ABP}}\ .$$

Sabiendo que la distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al plano genérico de ecuación $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ es $d(P_0,\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$; aplicándola al punto P(0, 0, c) y al plano $\pi \equiv x + z - 1 = 0$:

$$d(P,\ \pi) = \frac{|1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot c - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \underline{\frac{|c - 1|}{\sqrt{2}} = d(P,\ \pi)}.$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{c^2 + 2} = \frac{|c - 1|}{\sqrt{2}} \ ;;\ \frac{c^2 + 2}{4} = \frac{(c - 1)^2}{2} \ ;;\ c^2 + 2 = 2(c^2 - 2c + 1) = 2c^2 - 4c + 2 \ ;;\ c^2 - 4c = 0 \ ;;$$

$$c(c - 4) = 0 \Rightarrow \underline{c_1 = 0} \ ;;\ \underline{c_2 = 4}.$$

<u>El área del triángulo ABP es igual a la distancia de P a π para c = 0 y c = 4.</u>

****

OPCIÓN B

1º) a) Estudie las asíntotas de la función $f(x)=e^{-x^2}$.

b) Calcule los extremos relativos y los puntos de inflexión de f(x).

c) Utilizando los datos obtenidos en los apartados a) y b), haga la representación gráfica aproximada de la función f(x).

----

a)

Las asíntotas horizontales son los valores finitos de la función cuando x → ±∞.

$$y=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

La recta y = 0 (eje X) es asíntota horizontal de la función.

Las asíntotas verticales son los valores finitos de x para los cuales la función toma por valor ±∞.

$$f(x)=e^{-x^2}\Rightarrow \pm\infty \Rightarrow x\notin R.$$

La función f(x) no tiene asíntotas verticales.

La función f(x) no tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las horizontales.

b)

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo para los valores de x que anulan la primera derivada.

$$f'(x)=-2x\cdot e^{-x^2}=0 \Rightarrow \underline{x=0}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(x)=-2\left(1\cdot e^{-x^2}-x\cdot 2x\cdot e^{-x^2}\right)=\underline{2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right)=f''(x)}.$$

$f''(0)=2e^0(0-1)=-2<0 \Rightarrow$ Máximo relativo para x = 0.

$f(0)=e^0=1 \Rightarrow$ Máximo: A(1, 0).

Una función tiene un punto de inflexión para los valores reales de x que anulan la segunda derivada; esta condición, que es necesaria, no es suficiente: para que exista punto de inflexión tiene que ser distinta de cero la tercera derivada.

$$f''(x)=0 \Rightarrow 2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right)=0 \;;;\; 2x^2-1=0 \;;;\; x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}} \;;;\; \underline{x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

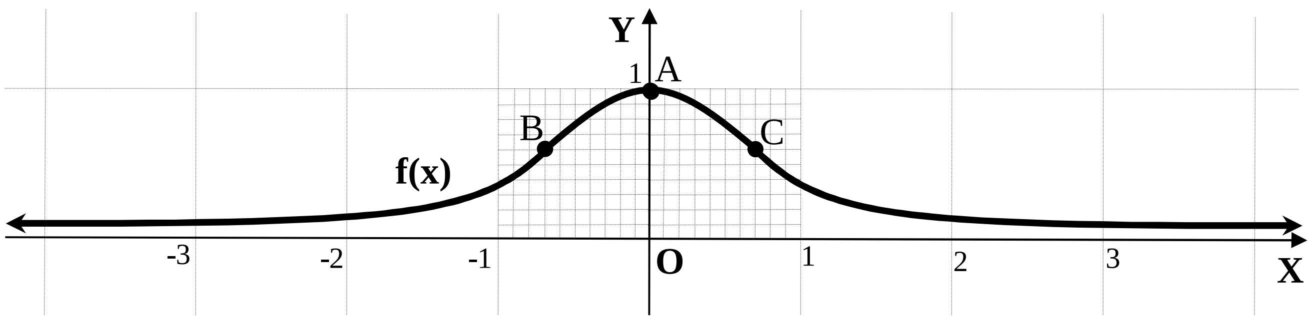
$$f'''(x)=-4x\cdot e^{-x^2}\cdot\left(2x^2-1\right)+2e^{-x^2}\cdot 4x=4x\cdot e^{-x^2}\left(2-2x^2+2\right)=\underline{8x\cdot e^{-x^2}\left(2-x^2\right)=f'''(x)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\left(2-\frac{1}{2}\right)=-\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{e}}\neq 0 \\ \\ f'''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{e}}\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{P.\ I.\ para\ \ x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ y\ \ x=\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}}{e} \Rightarrow P.\ I. \Rightarrow \underline{\underline{B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{e}}{e}\right)}}\ \ y\ \ \underline{\underline{C\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{e}}{e}\right)}}.$$

c)

La representación gráfica, aproximada, de la función es la de la figura.



****

2º) Calcule, utilizando la fórmula de integración por partes, una primitiva de F(x) de la función $f(x)=(x+1)^2 \cdot sen\ x$ que cumpla F(0) = 1.

$$F(x)=\int (x+1)^2 \cdot sen\ x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u=(x+1)^2 \rightarrow du=2(x+1)dx \\ sen\ x \cdot dx = dv \rightarrow v=-\cos\ x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(x+1)^2 \cdot \cos\ x - \int -\cos\ x \cdot 2(x+1) \cdot dx = -(x+1)^2 \cdot \cos\ x + 2 \cdot \int (x+1) \cdot \cos\ x \cdot dx =$$

$$= \underline{-(x+1)^2 \cdot \cos\ x + 2I_1 = F(x)}. \qquad (*)$$

$$I_1 = \int (x+1) \cdot \cos\ x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u=x+1 \rightarrow du=dx \\ \cos\ x \cdot dx = dv \rightarrow v = sen\ x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1) \cdot sen - \int sen \ \cdot dx = (x+1) \cdot sen\ x - \int sen\ x \cdot dx = \underline{(x+1) \cdot sen\ x + \cos\ x = I_1}.$$

Sustituyendo en valor obtenido de I_1 en el valor de F(x) dado en (*), queda:

$$\underline{F(x) = -(x+1)^2 \cos\ x + 2 \cdot [(x+1) \cdot sen\ x + \cos\ x] + C}.$$

Teniendo en cuenta que F(0) = 1:

$$F(0) = -(0+1)^2 \cos\ 0 + 2 \cdot [(0+1) \cdot sen\ 0 + \cos\ 0] + C = -1 + 2 \cdot 1 + C = 1 \ ;; \ 1 + C = 1 \ ;; \ \underline{C=0}.$$

$$\underline{\underline{F(x) = -(x+1)^2 \cos\ x + 2(x+1) sen\ x + 2\cos\ x}}$$

****

3º) ¿Existe alguna matriz $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix}$ que cumpla $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y sea No nula? Razone la respuesta.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} x+2z & y+2x \\ x+z & y+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & x-y \\ z+x & z-x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2z=x+y \\ x+z=x+z \\ 2x+y=x-y \\ x+y=z-x \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow y=2z \;;;\; \underline{z=\frac{1}{2}y} \\ \\ \rightarrow \underline{x=-2y} \\ \rightarrow 2x=z-y \end{array} \Rightarrow \; -4y=z-y \;;;\; \underline{z=-3y}\,??\,.$$

<u>No existe ninguna matriz X no nula que cumpla la condición dada.</u>

****

4º) Sea π el plano determinado por los puntos A(1, 0, 0), B(0, 1, 0) y P(0, 0, c), y sea la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - z = 3 \end{cases}$.

a) Obtenga la ecuación implícita de π.

b) Determine los valores de c para los que r y π son paralelos.

c) Determine los valores de c para los que r y π son perpendiculares.

----

a)

Los puntos A, B y P determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PA} = A - P = (1,\ 0,\ 0) - (0,\ 0,\ c) = (1,\ 0,\ -c)$.

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PB} = B - P = (0,\ 1,\ 0) - (0,\ 0,\ 1) = (0,\ 1,\ -1)$.

La ecuación general o implícita del plano π es la siguiente:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ z + c(x-1) + y = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv cx + y + z - c = 0}}.$$

b)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \lambda}\ ;;\ \underline{y = -3 + \lambda}\ ;;\ \underline{z = -3 + 2\lambda} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases}}.$$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 1,\ 2)$.

Un vector normal del plano $\pi \equiv cx + y + z - c = 0$ es $\overrightarrow{n} = (c,\ 1,\ 1)$.

Para que la recta r y el plano π sean paralelos es necesario que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean perpendiculares, es decir: que su producto escalar sea cero.

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Rightarrow (1,\ 1,\ 2) \cdot (c,\ 1,\ 1) = 0\ ;;\ c + 1 + 2 = 0\ ;;\ \underline{c = -3}.$$

<u>La recta r y el plano π son paralelos para c = -3.</u>

c)

Para que la recta r y el plano π sean perpendiculares es necesario que el vector director de la recta y el vector normal del plano sea linealmente dependientes (paralelos), para lo cual es necesario que sus componentes sean proporcionales.

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{1} \neq \frac{2}{1} \Rightarrow \underline{c \notin R}.$$

La recta r y el plano π no pueden ser perpendiculares para ningún valor real de c.

****