PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2010 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro cuestiones de la opción elegida puntuará 2'5 puntos como máximo. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) a) Enuncie el Teorema de Bolzano.

b) Aplique el Teorema de Bolzano para probar que la ecuación $e^x = -2x^2 + 2$ tiene soluciones. (Puede ser útil dibujar las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = -2x^2 + 2$).

c) Determine un intervalo de longitud 1 donde se encuentre alguna solución de la ecuación $e^x = -2x^2 + 2$.

----

a)

El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente forma:

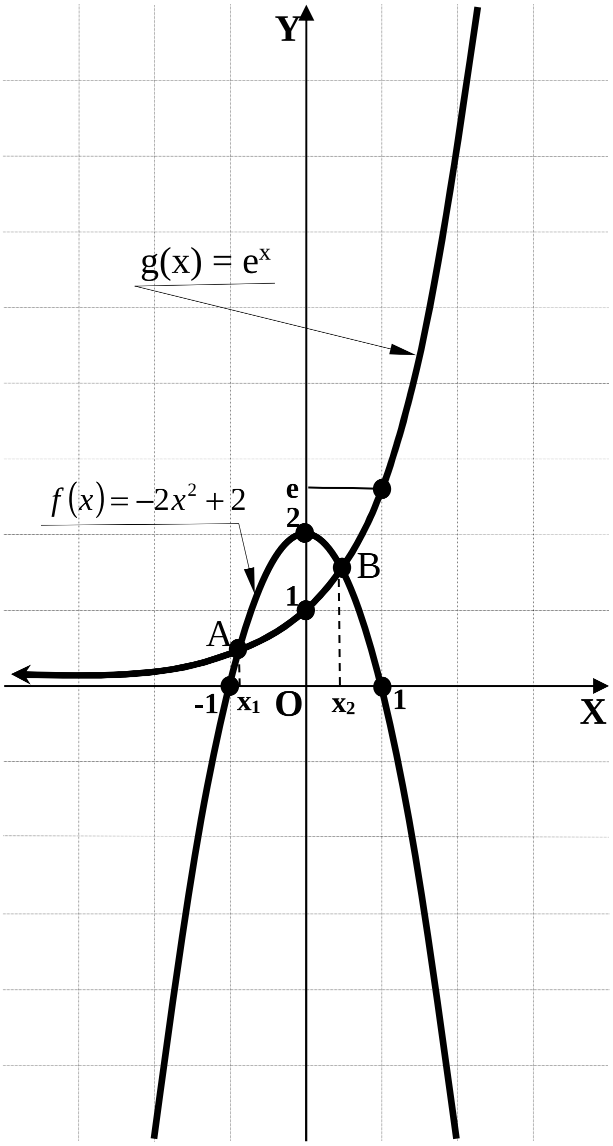
"Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$".

b)

Consideramos la función $f(x) = e^x + 2x^2 - 2$, deducida de la ecuación dada.

La función f(x) es continua en su dominio, que es R, por tanto lo será en cualquier intervalo finito que se considere.

Probar que la ecuación $e^x = -2x^2 + 2$ tiene soluciones es equivalente a probar que la función $f(x) = e^x + 2x^2 - 2$ tiene dos valores finitos de x, a y b, tales que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$.



Por ejemplo:

$$\begin{cases} f(0) = e^0 + 2 \cdot 0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \\ f(1) = e^1 + 2 \cdot 1^2 - 2 = e > 0 \end{cases}.$$

Según lo anterior puede afirmarse que la función $f(x) = e^x + 2x^2 - 2$ tiene al menos un punto de corte con el eje OX en el intervalo $(0,\ 1)$, como indica el Teorema de Bolzano y, como consecuencia, la ecuación $e^x = -2x^2 + 2$ tiene al menos una solución en el intervalo $(0,\ 1)$.

Lo anterior lo ilustra la figura, donde se han representado las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = -2x^2 + 2$, como se nos recomendaba; puede observarse que las abscisas de los puntos A y B son soluciones (las únicas) de la ecuación $e^x = -2x^2 + 2$.

Para la representación gráfica de la función $f(x) = e^x$ se ha tenido en cuenta que es monótona creciente, que el eje OX es una asíntota horizontal y que pasa por los puntos (0, 1) y (1, e). Para la representación de la función $g(x) = -2x^2 + 2$ se ha tenido en cuenta que es una parábola simétrica con respecto al eje OY, que su vértice es el punto (0, 2), que es cóncava $(\cap)$ y que corta al eje OX en los puntos (-1, 0) y (1, 0).

c)

Un intervalo de una unidad puede ser, precisamente, el considerado como ejemplo, $(0,\ 1)$.

De la observación de la figura se deduce que otro intervalo que puede considerarse es $(-1,\ 0)$, como comprobamos a continuación:

$$\begin{cases} f(0) = e^0 + 2 \cdot 0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \\ f(-1) = e^{-1} + 2 \cdot (-1)^2 - 2 = \dfrac{1}{e} + 2 - 2 = \dfrac{1}{e} > 0 \end{cases}$$

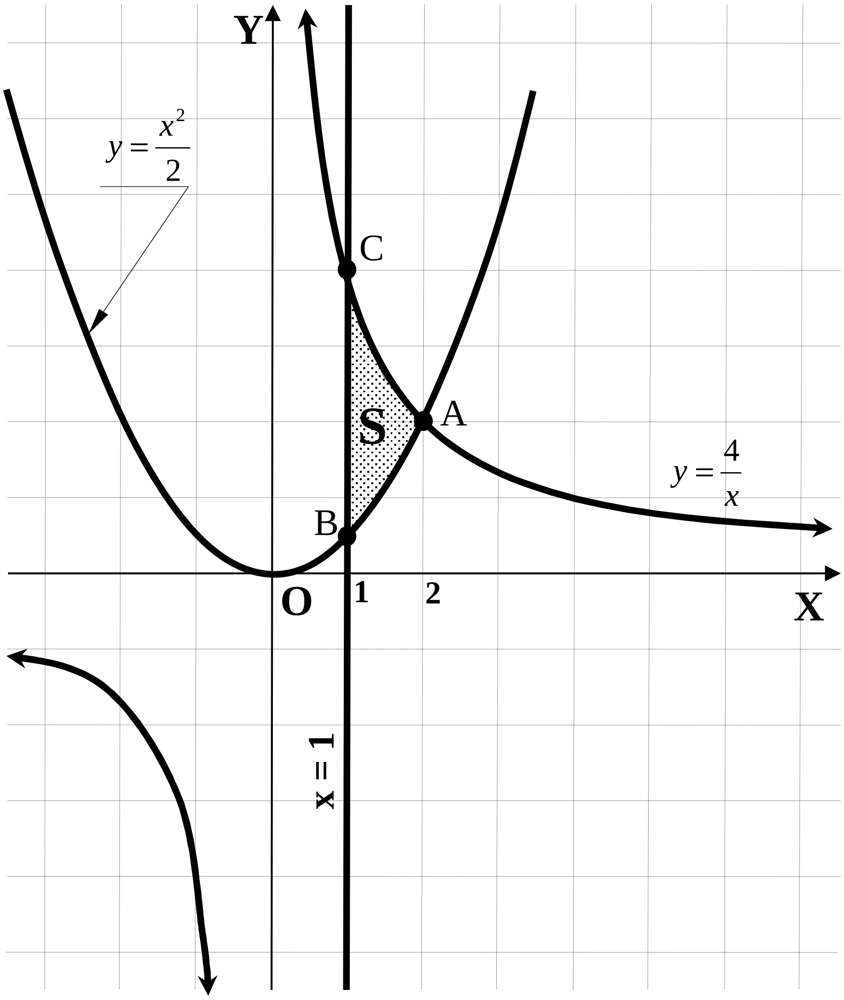
****

2º) a) Represente, de forma aproximada, la recta x = 1 y las curvas $y=\frac{x^2}{2}$, $y=\frac{4}{x}$, y señale el recinto plano limitado por ellas.

b) Calcule el área de dicho recinto.

----

a)



El punto de corte de la parábola y la hipérbola es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{x^2}{2} \\ y=\frac{4}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{2}=\frac{4}{x} \;;;\; x^3=8 \;;;$$

$$x=2 \rightarrow \underline{A(2,\ 2)}$$

El punto de corte de la parábola y la recta es:

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{x^2}{2} \\ x=1 \end{array}\right\} \rightarrow \underline{B\left(1,\ \frac{1}{2}\right)}$$

El punto de corte de la hipérbola y la recta es:

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{4}{x} \\ x=1 \end{array}\right\} \rightarrow \underline{C(1,\ 4)}$$

b)

Por ser las ordenadas de la hipérbola iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola en el intervalo correspondiente a la superficie a determinar, el área pedida es la siguiente:

$$S=\int_1^2\left(\frac{4}{x}-\frac{x^2}{2}\right)\cdot dx=\left[4Lx-\frac{x^3}{6}\right]_1^2=\left(4L2-\frac{2^3}{6}\right)-\left(4L1-\frac{1^3}{6}\right)=4L2-\frac{8}{6}-4L1+\frac{1}{6}=4L2-\frac{7}{6}=$$

$$\underline{\underline{=\frac{24L2-7}{6}\,u^2\cong 1'61\,u^2=S}}$$

****

3º) a) Discuta el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=1 \\ -x+y-z=0 \\ y-z=1 \end{array}\right\}$.

b) Resuelva el anterior sistema.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \;\; y \;\; A'=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de A es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-2-1+2+1=0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ A=2}.$$

Veamos ahora el rango de A':

$$Rango\ \ A' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2-1-1=0 \\ \\ \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-2+1+1=0 \\ \\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1-1+1-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Rango\ \ A'=2}$$

$$\underline{\underline{Rango\ \ A=Rango\ \ A'=2<n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Indeterminado}}$$

b)

Para resolverlo despreciamos una de las ecuaciones (primera) y parametrizamos una de las incógnitas (z = λ):

$$\left.\begin{array}{l} -x+y=\lambda \\ \underline{y=1+\lambda} \end{array}\right\} \Rightarrow x=y-\lambda=1+\lambda-\lambda=\underline{1=x}$$

$$Solución: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \ , \ \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}$$

****

4º) Calcule el ángulo que forma el plano $\pi \equiv \sqrt{3}\,x - z = 3$ con la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ y - x = -1 \end{cases}$. (Los ángulos se miden en radianes).

El ángulo α que forman el plano $\pi \equiv \sqrt{3}\,x - z = 3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ y - x = -1 \end{cases}$ es el complementario del ángulo que forman un vector $\overrightarrow{v}$ director de r y el vector $\overrightarrow{n} = \left(\sqrt{3},\ 0,\ -1\right)$, normal al plano π.

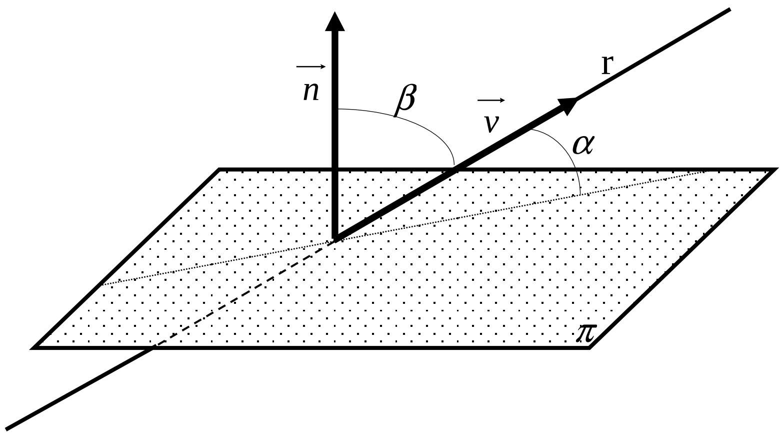
Un vector director de la recta r puede ser cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector que se obtienen al multiplicar vectorialmente los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (1,\ 1,\ 0)$ y $\overrightarrow{n_2} = (0,\ 1,\ -1)$.

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -i + k + j = -i + j + k = \underline{(-1,\ 1,\ 1) = \overrightarrow{v}}\ .$$

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \cos\beta \ \Rightarrow\ \cos\beta = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|}.$$

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un esquema de la situación:



$$\cos\beta = sen\,\alpha = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|} = \frac{(-1,\ 1,\ 1) \cdot \left(\sqrt{3},\ 0,\ -1\right)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{-\sqrt{3} + 0 - 1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{4}} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} - 3}{6} =$$

$$= \underline{-\frac{3 + \sqrt{3}}{6} = -0'7887} = sen\,\alpha \ \Rightarrow\ \alpha = arc\ \ sen\ \left(-0'7887\right) = \underline{\underline{-0'9087\ radianes = \alpha}}$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Escriba la “regla de la cadena” para la derivación de funciones compuestas.

b) Calcule, y simplifique en lo posible, la derivada de la función $f(x)=L\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$, $0<x<\pi$.

----

a)

La regla de la cadena se utiliza para derivar funciones compuestas, es decir, funciones que son, a la vez, funciones de otras funciones. Si una función es a su vez composición de dos funciones, $(g\circ f)(x)=f[g(x)]$, su derivada es de la siguiente forma y se denomina “regla de la cadena”:

$$\underline{\underline{(g\circ f)'(x)=f'[g(x)]=g'[f(x)]\cdot f'(x)}}$$

b)

La función $f(x)=L\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$ puede considerarse como $f(x)=L[g(x)]$ y su derivada es $f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$. (*)

$$\underline{g(x)=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \;\Rightarrow\; g'(x)=\frac{sen\ x\cdot(1+\cos x)-(1-\cos x)\cdot(-sen\ x)}{(1+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{sen\ x\cdot(1+\cos x)+(1-\cos x)\cdot sen\ x}{(1+\cos x)^2}=\frac{sen\ x\cdot(1+\cos x+1-\cos x)}{(1+\cos x)^2}=\underline{\frac{2\,sen\ x}{(1+\cos x)^2}=g'(x)}$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión (*):

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{\frac{2\,sen\ x}{(1+\cos x)^2}}{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac{2\,sen\ x\cdot(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2\cdot(1-\cos x)}=\frac{2\,sen\ x}{(1+\cos x)\cdot(1-\cos x)}=\frac{2\,sen\ x}{1-\cos^2 x}=\frac{2\,sen\ x}{sen^2\ x}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{2}{sen\ x}=2\cos ec\ x=f'(x)}}$$

Nota: La necesidad de ser $0<x<\pi$ es debido a que, necesariamente, tiene que cumplirse que la expresión $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}>0$. En otro caso sería el logaritmo de un número negativo.

****

2º) a) Diga cuándo una función F(x) es primitiva de otra función f(x).

b) Calcule una primitiva F(x) de la función $f(x) = x \cdot e^{x^2}$ que cumpla F(0) = 0.

----

a)

La función F(x) es una función primitiva de la función f(x) en el intervalo cerrado $[a,\ b]$, cuando $F'(x) = f(x),\ \ \forall x \in [a,\ b]$.

Si F(x) es una función primitiva de f(x) y C es una constante, la función $F(x) + C$ también es una primitiva de f(x), lo cual significa que una función tiene infinitas funciones primitivas, todas aquellas que se diferencian en una constante de f(x).

b)

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int x \cdot e^{x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt\ ;;\ x\,dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\int e^t \cdot dt = \frac{1}{2}e^t + C$$

$$\underline{F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C} \Rightarrow F(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}e^{0^2} + C = 0\ ;;\ \frac{1}{2}e^0 + C = 0\ ;;\ \frac{1}{2} + C = 0 \Rightarrow \underline{C = -\frac{1}{2}}.$$

La función pedida es $\underline{\underline{F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{x^2} - 1\right)}}$.

****

3º) Determine el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ b+1 & 1 & 1 \\ 1 & b & b-1 \end{pmatrix}$, según los valores de b.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ b+1 & 1 & 1 \\ 1 & b & b-1 \end{vmatrix}=b-1+b(b+1)+2-1-b-2(b+1)(b-1)=b(b+1)-2(b+1)(b-1)=$$

$$=(b+1)(b-2b+2)=(b+1)(2-b)=0 \Rightarrow \underline{b_1=-1} \;;;\; \underline{b_2=2}.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} b\neq -1 \\ b\neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ \ A=3}$$

Para b = - 1 es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ A=2}$.

Para b = 2 es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ A=2}$.

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} b=-1 \\ b=2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ A=2}$$

****

4º) De todos los planos que pasan por los puntos P(0, 0, -1) y Q(1, 0, 0), calcule el plano π que sea paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ x-z=0 \end{cases}$.

Los puntos P y Q determinan el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,\ 0,\ 0) - (0,\ 0,\ -1) = (1,\ 0,\ 1)$.

Un vector $\overrightarrow{v}$ director de r es el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (1,\ 1,\ 0)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ 0,\ -1)$:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -i - k + j = -i + j - k = (-1,\ 1,\ -1).$$

El plano π lo determinan los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y uno cualquiera de los puntos dados, por ejemplo, P:

$$\pi(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ (z+1) - y - x + y = 0 \ ;;\ z + 1 - x = 0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x - z - 1 = 0}}$$

****