PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2010 (ESPECÍFICO)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro cuestiones de la opción elegida puntuará 2’5 puntos como máximo. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) Calcule el límite: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x \cdot \cos x - 1}{sen\ x - x + 1 - \cos x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x\cos x - 1}{sen\ x - x + 1 - \cos x} = \frac{e^0 - 0 \cdot 1 - 1}{0 - 0 + 1 - 1} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L´Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x - (1 \cdot \cos x - x \cdot sen\ x)}{\cos x - 1 + sen\ x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x + x \cdot sen\ x}{\cos x - 1 + sen\ x} = \frac{e^0 - 1 + 0}{1 - 1 + 0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L´Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x + sen\ x + 1 \cdot sen\ x + x \cdot \cos x}{-sen\ x + \cos x} = \frac{e^0 + 0 + 0 + 0 \cdot 1}{-0 + 1} = 1.$$

$$\underline{\underline{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x\cos x - 1}{sen\ x - x + 1 - \cos x} = 1}}$$

****

2º) Calcule, utilizando la fórmula de integración por partes, una primitiva F(x) de la función $f(x)=x^2 e^{-x}$ que cumpla F(0) = 0.

$$F(x)=\int x^2\cdot e^{-x}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2=u \rightarrow du=2x\,dx \\ e^{-x}\cdot dx=dv \rightarrow v=-e^{-x}\end{array}\right\} \Rightarrow F(x)=x^2\cdot\left(-e^{-x}\right)-\int -e^{-x}\cdot 2x\,dx=$$

$$=-x^2\cdot e^{-x}+2\int x\cdot e^{-x}\cdot dx=\underline{-x^2\cdot e^{-x}+2I=F(x)} \qquad (*)$$

$$I=\int x\cdot e^{-x}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=u \rightarrow du=dx \\ e^{-x}\cdot dx=dv \rightarrow v=-e^{-x}\end{array}\right\} \Rightarrow I=x\cdot\left(-e^{-x}\right)-\int -e^{-x}\cdot dx=-x\cdot e^{-x}+\int e^{-x}\cdot dx=$$

$$=-x\cdot e^{-x}-e^{-x}=\underline{-e^{-x}(x+1)=I}$$

Sustituyendo el valor obtenido de I en la expresión (*):

$$F(x)=-x^2\cdot e^{-x}-2e^{-x}(x+1)+C=-e^{-x}\left[x^2+2(x+1)\right]+C=\underline{-e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)+C=F(x)}$$

$$F(x)=0 \Rightarrow -e^{-0}\left(0^2+2\cdot 0+2\right)+C=0\ ;;\ -1\cdot(0+0+2)+C\ ;;\ -2+C=0\ ;;\ \underline{C=2}$$

$$\underline{\underline{F(x)=-e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)+2}}$$

****

3º) a) Defina el concepto de rango de una matriz.

b) Calcule el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Diga, razonadamente, si la segunda columna de la matriz anterior es combinación lineal de las otras dos.

----

a)

Todas las matrices, mediante transformaciones elementales, se pueden transformar en matrices escalonadas.

Una matriz escalonada es aquella en la cual, si tiene filas nulas están situadas en la parte inferior de la matriz y, en las filas no nulas, el primer elemento distinto de cero de una fila está situado más a la derecha que el primer elemento diferente de cero de la fila superior.

El rango de una matriz escalonada es el número de filas no nulas.

El rango de una matriz A es el rango de una matriz escalonada equivalente a A.

También puede definirse el rango de una matriz por su determinante, para lo cual es necesario definir menor de orden k de una matriz que es el determinante de cualquier submatriz cuadrada de orden k que se puede formar con los elementos de la matriz.

El rango de una matriz A es el orden del mayor menor que puede formarse que sea distinto de cero.

b)

El rango de A mayor o igual que uno por tener elementos distintos de cero.

La matriz A tiene rango igual o mayor que dos por ser $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$.

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-4+1+2+4-1-2=0 \Rightarrow \underline{\underline{\mathit{Rango}\ A=2}}.$$

Nota: Considerando lo anterior, se podía haber determinado el rango de A teniendo en cuenta que la tercera columna es igual que la primera con signo contrario, según la propiedad de los determinantes que dice que cuando un determinante tiene dos líneas proporcionales su valor es cero.

c)

Si la segunda columna de la matriz anterior es combinación lineal de las otras dos, implica que el vector $\overrightarrow{u}=(1,\ 2,\ 1)$ es combinación lineal del los vectores $\overrightarrow{v}=(-1,\ 1,\ -2)$ y $\overrightarrow{w}=(1,\ -1,\ 2)$. Como quiera que es $\overrightarrow{v}=-\overrightarrow{w}$, o sea, que son linealmente dependientes, y siendo $\frac{1}{-1}\neq\frac{2}{1}\neq\frac{1}{-2}$, podemos asegurar que:

<u>La segunda columna de la matriz anterior no es combinación lineal de las otras dos</u>

****

4º) Determine la relación que deben cumplir λ y μ para que la distancia del punto $P(\lambda,\ 1,\ \mu)$ al plano determinado por los puntos A(1, 1, 1), B(1, 0, 0) y C(0, 2, 1) sea igual a 1.

Los puntos A, B y C determinan el plano π:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 0,\ 0) - (1,\ 1,\ 1) = \underline{(0,\ -1,\ -1) = \overrightarrow{AB}}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 2,\ 1) - (1,\ 1,\ 1) = \underline{(-1,\ 1,\ 0) = \overrightarrow{AC}}$$

$$\pi(B;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ y - z + (x-1) = 0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv x + y - z - 1 = 0}$$

La distancia de un punto a un plano es: $d(P;\ \pi) = \dfrac{|\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\ |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, siendo la ecuación del plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y el punto $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

Aplicando la fórmula al punto $P(\lambda,\ 1,\ \mu)$ y al plano $\pi \equiv x + y - z - 1 = 0$:

$$d(P,\ \pi) = 1 \Rightarrow \frac{|1 \cdot \lambda + 1 \cdot 1 - 1 \cdot \mu - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|\lambda + 1 - \mu - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{|\lambda - \mu|}{\sqrt{3}} = 1\ ;;\ \underline{\underline{|\lambda - \mu| = \sqrt{3}}}$$ o también:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda - \mu = \sqrt{3} \\ \lambda - \mu = -\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = \mu + \sqrt{3}}}\ \ y\ \ \underline{\underline{\lambda = \mu - \sqrt{3}}}$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Defina la noción de mínimo relativo de una función.

b) Para cada x sea h(x) la suma de las coordenadas del punto $[x,\ f(x)]$ de la gráfica de $f(x)=x^4+x^3+x^2-x+1$. Calcule los extremos relativos de h(x).

c) ¿Tiene h(x) algún extremo absoluto? Razone la respuesta.

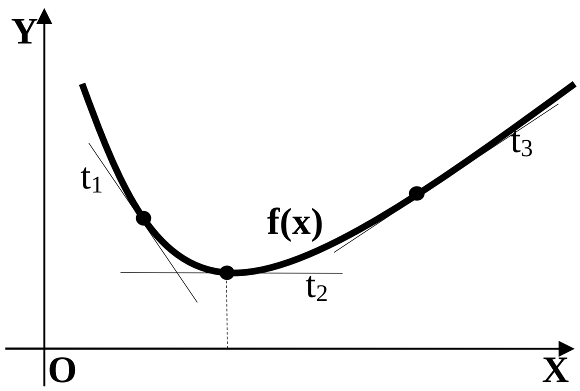
----

a) Defina la noción de mínimo relativo de una función.

Una función f(x), continua y derivable en el entorno de un punto de abscisa x = a, tiene un mínimo relativo o local para x = a, si existe un entorno del punto de abscisa a, tal que $f(x) \geq f(a),\ \forall a \in R$.

De lo anterior se deduce que, para que una función tenga un mínimo relativo es condición necesaria que la derivada sea cero.

Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos observamos las pendientes de la función en los entornos del mínimo:



Mínimo relativo

En la figura se observa que las tangentes van aumentando, $t_1 < t_2 < t_3$; como la tangente o pendiente es la derivada de la función, en el entorno de un mínimo local las derivadas constituyen una función decreciente, por lo cual su derivada, o sea: la derivada de la derivada, (f'') es negativa.

En resumen: $\underline{\underline{Mínimo\ \ relativo \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=0 \\ f''(x)>0 \end{cases}}}$

b)

$$h(x)=x+f(x)=x^4+x^3+x^2-x+1=x+\left(x^4+x^3+x^2-x+1\right)=\underline{x^4+x^3+x^2+1=h(x)}$$

$$h'(x)=4x^3+3x^2+2x=x\left(4x^2+3x+2\right)=0 \Rightarrow \underline{x_1=0}\ ;;\ 4x^2+3x+2=0\ .$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-32}}{2} \Rightarrow x \notin R \Rightarrow$$ La única solución real es para x = 0.

$$h''(x)=12x^2+6x+2 \Rightarrow h''(0)=2>0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ \ relativo\ \ para\ \ x=0}.$$

$$h(0)=1 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo\ \ relativo:\ \ A(0,\ 1)}}$$

c)

Sabiendo que la función h(x) es continua en R y, como quiera que el único extremo relativo es el hallado:

<u>La función h(x) tiene un mínimo absoluto para x = 1.</u>

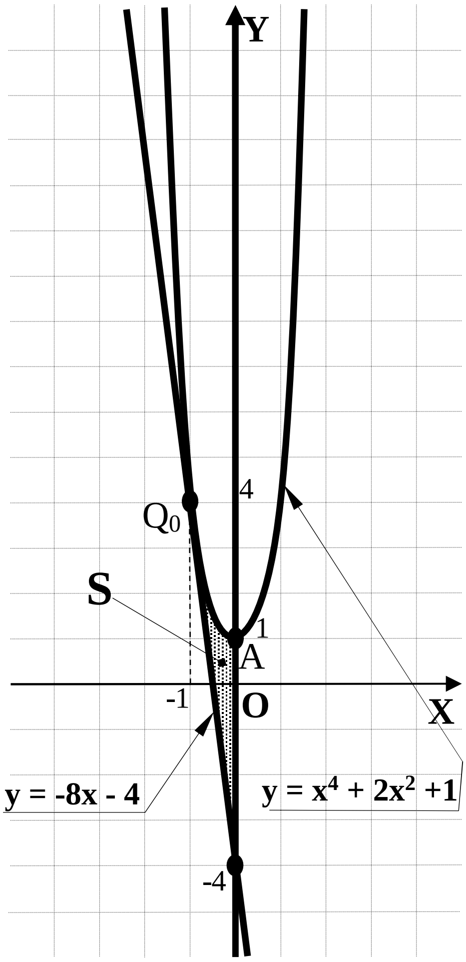
****

2º) a) Represente, de forma aproximada, la curva $y = x^4 + 2x^2 + 1$ y la recta tangente a dicha curva en el punto $Q_0(-1,\ 4)$.

b) Señale el recinto plano limitado por el eje OY y por la curva y la recta del apartado anterior, y calcule el área de dicho recinto.

----

a)



La curva $y = x^4 + 2x^2 + 1$ es simétrica con respecto al eje de ordenadas por cumplirse $y(-x) = y(x)$.

Para x = 0 la curva toma el valor 1, por lo cual pasa por el punto A(0, 1).

Para facilitar la representación de la curva vamos a determinar sus extremos relativos.

$y' = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow \underline{x = 0}$, que es solución única.

$y'' = 12x^2 + 4 \Rightarrow y''(0) = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo para } x = 0}$

$y(0) = 1 \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo}: A(0,\ 1)}$.

El punto de tangencia es $Q_0(-1,\ 4)$. Sabiendo que la pendiente a una curva en un punto es el valor de su derivada en ese punto:

$y'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 4 \cdot (-1) = -4 - 4 = \underline{-8 = m}$.

La fórmula de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$. Aplicada al caso que nos ocupa es:

$y - 4 = -8(x + 1) = -8x - 8 \Rightarrow$ Recta tangente: $\underline{y = -8x - 4}$.

La representación gráfica de la situación es la que indica la figura.

b)

Para calcular el área del recinto que se nos pide tendremos en cuenta que las ordenadas de la curva son iguales o mayores que las de la recta en el intervalo (-1, 0), correspondiente al recinto.

$$S = \int_{-1}^{0} \left[(x^4 + 2x^2 + 1) - (-8x - 4) \right] \cdot dx = \int_{-1}^{0} (x^4 + 2x^2 + 8x + 5) \cdot dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} + 5x \right]_{-1}^{0} =$$

$$= 0 - \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + 4x^2 + 5x \right]_{-1}^{0} = -\left[\frac{(-1)^5}{5} + \frac{2 \cdot (-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) \right] = +\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 4 + 5 =$$

$$= 1 + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{15+3+10}{15} = \underline{\underline{\frac{28}{15}\, u^2 \cong 1'87\, u^2 = S}}$$

****

3º) Discuta, en función del parámetro b, el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} bx+by=1 \\ 3x+bz=b-2 \\ -y+z=b-3 \end{array}\right\}$. (No es necesario resolverlo en ningún caso).

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} b & b & 0 \\ 3 & 0 & b \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \;\; y \;\; A'=\begin{pmatrix} b & b & 0 & 1 \\ 3 & 0 & b & b-2 \\ 0 & -1 & 1 & b-3 \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función de b es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} b & b & 0 \\ 3 & 0 & b \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-b^2-3b=-b(b+3)=0 \Rightarrow \underline{b_1=0} \;;;\; \underline{b_2=-3}.$$

$$\underline{\underline{Para \; \left\{\begin{array}{l} b\neq 0 \\ b\neq -3 \end{array}\right\} \Rightarrow Rango \;\; A = Rango \;\; A' = 3 = n^{o} \; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; Determinado}}$$

Veamos ahora el rango de A':

$$Para \;\; b=0 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango \;\; de \;\; A' \Rightarrow \{C_2=-C_3\} \Rightarrow \{C_1, \; C_3, \; C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=3\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \;\; A'=3}$$

$$Para \;\; b=-3 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango \;\; A' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, \; C_2, \; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=9+9=18\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \;\; A'=3}$$

$$\underline{\underline{Para \; \left\{\begin{array}{l} b=0 \\ b=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow Rango \;\; A=2 \;;;\; Rango \;\; A'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

****

4º) Dados los puntos A(1, 1, 1), B(1, 0, 0) y C(0, 2, 1), sea r la recta que pasa por A y B, y sea π el plano que pasa por C y es perpendicular a r. Calcule el punto P_0 en el que se corta r y π.

Los puntos A y B determinan el vector director de r, que es el siguiente:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BA} = A - B = (1,\ 1,\ 1) - (1,\ 0,\ 0) = (0,\ 1,\ 1).$$

La ecuación de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda, \ \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}$.

Un vector normal del plano π es el vector director de r: $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v} = (0,\ 1,\ 1)$; la expresión general de π es de la forma $\pi \equiv y + z + D = 0$.

Como el plano π contiene al punto C(0, 2, 1) tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv y + z + D = 0 \\ C(0,\ 2,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 + 1 + D = 0 \ ;; \ \underline{D = -3} \ \Rightarrow \ \underline{\pi \equiv y + z - 3 = 0}.$$

El punto de intersección de π y r es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv y + x - 3 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda + \lambda - 3 = 0 \ ;; \ 2\lambda = 3 \ ;; \ \underline{\lambda = \frac{3}{2}} \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = \frac{3}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{P_0\left(1,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)}}.$$

****