PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

SEPTIEMBRE – 2010 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro cuestiones de la opción elegida puntuará 2'5 puntos como máximo. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) Diga, razonando la respuesta, qué valor debe tomar c para que sea continua la función $f(x)=\begin{cases} c & si \quad x=0 \\ \frac{e^x-1-x}{x^2} & si \quad x\neq 0 \end{cases}$.

La función f(x) es continua para cualquier valor real de x, excepto para x = 0 que es dudosa; para que la función f(x) sea continua en x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} c=\underline{c}=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\Rightarrow(*)\Rightarrow\underline{\frac{1}{2}} \end{array}\right\}\Rightarrow \quad \underline{c=\frac{1}{2}}$$

$$(*)\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{e^0-1-0}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow \; Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{e^0-1}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow \; Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{e^0}{2}=\underline{\frac{1}{2}}.$$

$$\underline{\underline{La \quad función \quad f(x) \quad es \quad continua \quad para \quad c=\frac{1}{2}}}$$

****

2º) Calcule el valor de la integral $I = \int_1^2 \left(\frac{x-1}{8} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot dx$.

$$I = \int_1^2 \left(\frac{x-1}{8} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot dx = \int_1^2 \frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{8^{\frac{2}{3}}} \cdot dx = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} \cdot \int_1^2 (x-1)^{\frac{2}{3}} \cdot dx = \frac{1}{\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}} \cdot \left[\frac{(x-1)^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} \right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2^2} \cdot \left[\frac{(x-1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \right]_1^2 = \frac{3}{4 \cdot 5} \cdot \left[(x-1)^{\frac{5}{3}} \right]_1^2 = \frac{3}{20} \cdot \left[(2-1)^{\frac{5}{3}} - (1-1)^{\frac{5}{3}} \right] = \frac{3}{20} \cdot 1^{\frac{5}{3}} = \underline{\underline{\frac{3}{20}}} = I \,.$$

****

3º) a) Diga, justificando la respuesta, si es de Cramer el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} y-z=1 \\ -x+4z=0 \\ 2y-z=1 \end{array}\right\}$.

b) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones.

----

a)

Un sistema se denomina "de Cramer" si puede aplicarse para su resolución la Regla de Cramer y eso ocurre cuando el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero. El determinante de la matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo determinante es $|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$.

El sistema dado es de Cramer.

b)

Resolvemos el sistema aplicando la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{1}=4-8=\underline{\underline{-4=x}} \quad ;; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{1}=1-1=\underline{\underline{0=y}} \quad ;;$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{1}=-2+1=\underline{\underline{-1=z}}\,.$$

****

4º) Fijados los puntos A(1, 0, 0) y B(0, 1, 0), obtenga la relación que deben cumplir los números reales λ y μ para que el punto $P(\lambda,\ \mu,\ 0)$ sea tal que el triángulo ABP tenga área igual a 1.

Los vectores que determinan el triángulo son:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 1,\ 0) - (1,\ 0,\ 0) = \underline{(-1,\ 1,\ 0)}\ .$$

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (\lambda,\ \mu,\ 0) - (1,\ 0,\ 0) = \underline{(\lambda - 1,\ \mu,\ 0)}.$$

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AP}$. Conviene saber que el área del paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan, por lo tanto:

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AP}\right) = 1 \ \Rightarrow\ \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda - 1 & \mu & 0 \end{matrix} \right\| = 1\ ;;\ \left| -\mu k - (\lambda - 1)k \right| = 2\ ;;$$

$$\left| (-\mu - \lambda + 1)k \right| = 2\ ;;\ \mu + \lambda - 1 = 2\ ;;\ \underline{\mu + \lambda = 3}$$

$$\underline{\underline{\textit{Para que el triángulo ABP tenga área 1 tiene que ser } \mu + \lambda = 3}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Halle todos los puntos de la gráfica de la función $f(x)=x^3+x^2+x+1$ en los que su recta tangente sea paralela a la recta de ecuación $2x-y=0$.

La recta $2x-y=0$ se puede expresar como $y=2x$, donde se observa que su pendiente es m = 2.

La pendiente a una función en un punto coincide con el valor de su derivada en ese punto, por lo tanto la expresión de la pendiente de $f(x)=x^3+x^2+x+1$ es:

$m=f'(x)=3x^2+2x+1$. Como la pendiente de la tangente tiene que ser paralela a la recta tiene que ser $m=3x^2+2x+1=2$;; $3x^2+2x-1=0$.

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{6}=\frac{-2\pm 4}{6}=\frac{-1\pm 2}{3}\Rightarrow \underline{x_1=-1} \;;;\; \underline{x_2=\frac{1}{3}}.$$

Los puntos de tangencia son los siguientes:

$$f(-1)=(-1)^3+(-1)^2-1+1=-1+1=0 \Rightarrow \underline{\underline{T_1(-1,\ 0)}}.$$

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}+1=\frac{1}{27}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1=\frac{1+3+9+27}{27}=\frac{40}{27} \Rightarrow \underline{\underline{T_2\left(\frac{1}{3},\ \frac{40}{27}\right)}}$$

****

2º) a) Represente, aproximadamente, el recinto plano limitado por la parábola $y = 2x^2$ y la parábola $y = x^2 + 4$.

b) Calcule el área de dicho recinto.

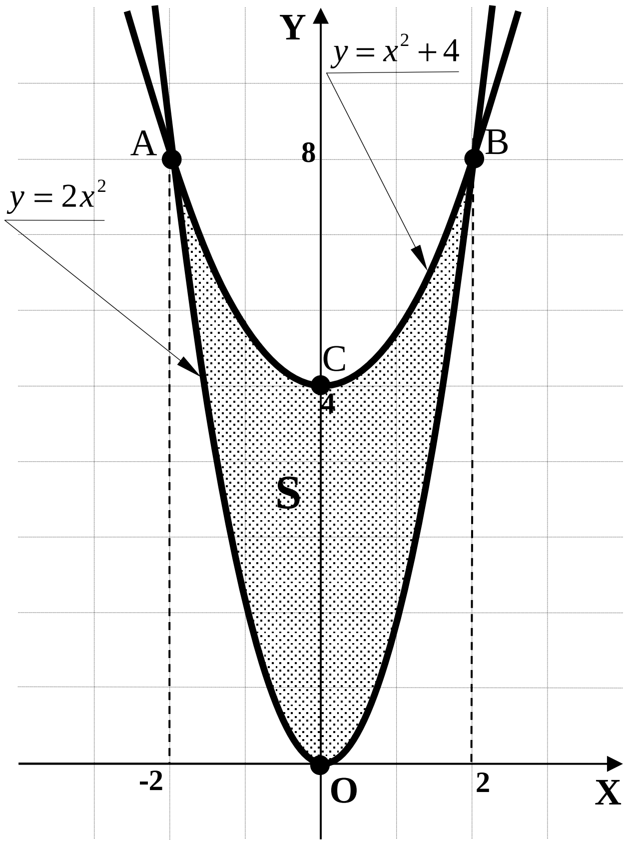
----

a)

Los puntos de corte de las parábolas son:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x^2 \\ \\ y = x^2 + 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x^2 = x^2 + 4 \;\;;;\;\; x^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = -2 \;\rightarrow\; \underline{A(-2,\; 8)} \\ \\ x_2 = 2 \;\rightarrow\; \underline{B(2,\; 8)} \end{array}\right.$$



Las dos parábolas son convexas $(\cup)$ y sus vértices son O(0, 0) y C(0, 4).

La representación gráfica de las dos parábolas, así como el recinto plano que determinan es, aproximadamente, la que indica la figura.

b)

Como puede apreciarse, en el intervalo correspondiente al área a calcular, las ordenadas de la parábola $y = x^2 + 4$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $y = 2x^2$.

El área pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^{2} \left[\left(x^2 + 4 \right) - 2x^2 \right] \cdot dx = \int_{-2}^{2} \left(-x^2 + 4 \right) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2 \right) - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2) \right] = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{48 - 16}{3} = \underline{\underline{\frac{32}{3}\; u^2 = S}}$$

****

3º) a) Sean B y C matrices cuadradas de orden 3. Diga cuando, por definición, C es la matriz inversa de B.

b) Diga razonadamente si la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ tiene inversa, y si la respuesta es afirmativa calcule la matriz A^{-1}.

----

a)

Siendo B y C matrices cuadradas de orden 3, por definición, C es la matriz inversa de B cuando se cumple que $B \cdot C = C \cdot B = I$, siendo I la matriz unitaria de tercer orden.

b)

Para que la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ tenga inversa es condición necesaria que el valor de su determinante sea distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-1-1=-2\neq 0.$$ La matriz A tiene inversa.

Obtenemos la inversa de A por el método de Gauss-Jordan:

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\to F_2-F_1\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&1&-1&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_2\leftrightarrow F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&1\\0&-1&1&-1&1&0\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}F_1\to F_1-F_2\\F_3\to F_3+F_2\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&-1\\0&1&1&0&0&1\\0&0&2&-1&1&1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{F_2\to\frac{1}{2}F_2\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&-1\\0&1&1&0&0&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}F_1\to F_1+F_3\\F_2\to F_2-F_3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)\Rightarrow\ \underline{\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}}}$$

****

4º) Sea θ el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{u}=(\lambda,\ 1,\ 0)$ y $\overrightarrow{v}=(1,\ \mu,\ 0)$, donde λ y μ son números reales.

a) Obtenga la relación que deben cumplir λ y μ para que se cumpla que $\cos\theta=0$.

b) Obtenga la relación que deben cumplir λ y μ para que se cumpla que $sen\ \theta=0$.

----

a)

Por definición, el producto escalar de dos vectores es el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman:

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\left|\overrightarrow{u}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v}\right|\cdot\cos\theta \;\Rightarrow\; \cos\theta=\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v}\right|}=0 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0 \;\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=(\lambda,\ 1,\ 0)\cdot(1,\ \mu,\ 0)=\lambda+\mu+0=0.$$

<u>Para que cos ө = 0 tiene que cumplirse que λ + μ = 0.</u>

b)

Por definición, el módulo del producto vectorial de dos vectores es el producto de sus módulos por el seno del ángulo que forman:

$$\left|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right|=\left|\overrightarrow{u}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v}\right|\cdot sen\ \theta \;\Rightarrow\; sen\ \theta=\frac{\left|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v}\right|}=0 \;\Rightarrow\; \left|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right|=0 \;\Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right|=\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \mu & 0 \end{matrix}\right\|=0 \Rightarrow \left|\lambda\mu k-k\right|=0\ ;;\ k\cdot\left|\lambda\mu-1\right|=0 \;\Rightarrow\; \lambda\mu-1=0\ ;;\ \underline{\lambda\mu=1}.$$

<u>Para que sen ө = 0 tiene que cumplirse que λ · μ = 1.</u>

****