

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA****SEPTIEMBRE – 2009**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas.

Cada una de las cuatro cuestiones de la opción elegida puntuará 2'5 puntos como máximo.

Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Diga razonadamente cuál es el rango de la matriz $A \cdot B$.

b) Clasifique y resuelva el sistema de ecuaciones $A \cdot B \cdot X = O$.

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = A \cdot B$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} F_2 = -2F_1 \\ F_3 = -F_1 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Rango de } (A \cdot B) = 1.}}$$

b)

$$A \cdot B \cdot X = O \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ -2x + 4y - 4z = 0 \\ -x + 2y - 2z = 0 \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta el apartado anterior, el sistema anterior es equivalente a la ecuación $x - 2y + 2z = 0$.

Por tratarse de un “sistema” homogéneo de una ecuación con tres incógnitas, el sistema es compatible indeterminado con dos grados de libertad, lo cual significa que para su resolución hemos de parametrizar dos incógnitas.

$$\text{Solución: } \underline{\underline{y = \lambda \quad ; \quad z = \mu \quad ; \quad x = 2\lambda + 2\mu, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}}}$$

2º) Considere las rectas $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$.

a) Compruebe que r y s son coplanarias.

b) Obtenga las ecuaciones de la recta t que corta a r y a s, y es perpendicular a ambas.

a)

Existen diversas formas de comprobar que r y s son coplanarias; una de ellas es la siguiente:

En primer lugar expresamos la recta r por unas ecuaciones implícitas:

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{0} \quad ; ; \quad r \equiv \begin{cases} x = -y \\ z - 1 = 0 \end{cases} \quad ; ; \quad \underline{r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}}$$

Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas que determinan las rectas r y s son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Según los rangos de A y A' pueden presentarse los casos siguientes:

Rango A = Rango A' = 2 $\rightarrow$ Coincidentes ; ; Rango A = 2 ; ; Rango A' = 3 $\rightarrow$ Paralelas

Rango A = Rango A' = 3 $\rightarrow$ Secantes ; ; Rango A = 3 ; ; Rango A' = 4 $\rightarrow$ Se cruzan

Empezamos calculando el rango de A':

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } A' \leq 3} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \{C_1, C_2, C_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } A = \text{Rango } A' = 3}$$

Las rectas r y s son secantes, por lo cual son coplanarias, c. q. c.

b)

El punto de corte de las rectas r y s es la solución del sistema que forman:

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y=0 \\ z-1=0 \\ x+y=0 \\ x-z=1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x+y=0 \\ z=1 \\ x-z=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{x=2} \;; \; \underline{y=-2} \Rightarrow \underline{P(2, -2, 1)}$$

Un vector $\vec{w}$ perpendicular común a las rectas r y s es cualquiera que sea linealmente dependiente al producto vectorial de los vectores directores de las dos rectas.

$$\text{Un vector director de } r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda \\ z=1 \end{cases} \text{ es } \underline{\vec{u} = (1, -1, 0)}.$$

Para determinar un vector director de la recta s la expresamos mediante unas ecuaciones paramétricas:

$$s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ x-z=1 \end{cases} \Rightarrow x=\lambda \Rightarrow y=-\lambda \;; \; z=-1+\lambda \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{\vec{v} = (1, -1, 1)}.$$

$$\vec{w}' = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -i - k + k - j = -i - j = (-1, -1, 0) \Rightarrow \underline{\vec{w} = (1, 1, 0)}.$$

$$\underline{\underline{t(P; \vec{w}) \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{0}}} \text{ o también: } t \equiv \begin{cases} x-2=y+2 \\ z-1=0 \end{cases} \;; \; \underline{\underline{t \equiv \begin{cases} x-y-4=0 \\ z-1=0 \end{cases}}}$$

3º) a) Enuncie el Teorema de Rolle.

b) Aplique dicho teorema para probar que, cualquiera que sea el valor del número real α , la ecuación $x^3 - 12x + \alpha = 0$ no puede tener dos soluciones distintas en el intervalo cerrado $[-2, 2]$.

a)

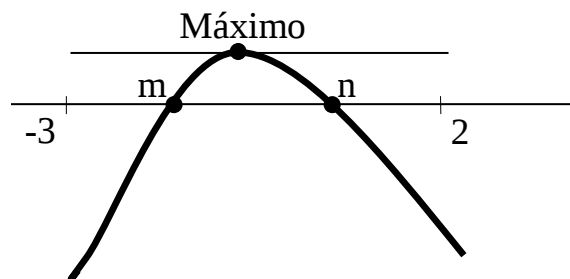
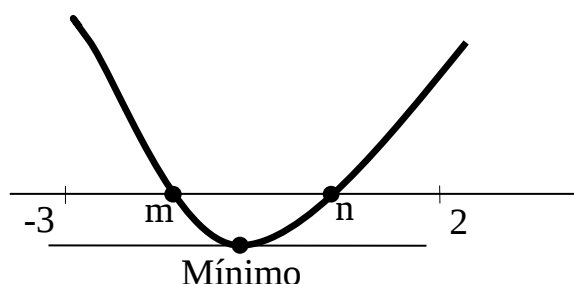
El teorema de Rolle se puede enunciar diciendo:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b) y si se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

b)

Se considera la función $f(x) = x^3 - 12x + \alpha$. Por tratarse de una función polinómica es continua y derivable en todo su dominio, que es $\mathbb{R}$, por lo cual, lo será en cualquier intervalo considerado, por ejemplo en el indicado: $[-2, 2]$.

Para que la ecuación $x^3 - 12x + \alpha = 0$ tenga dos soluciones distintas en el intervalo cerrado $[-2, 2]$ es necesario que la función $f(x) = x^3 - 12x + \alpha$ se anule para dos valores m y n tales que $-2 < m < n < 2$, lo que implica que entre esos dos valores la función tenga un máximo o un mínimo relativo, como se deduce del Teorema de Rolle y se puede observar en las figuras adjuntas.



Para que la función se anule en los extremos del intervalo los valores que toma el número real α son los siguientes:

$$f(-2)=0 \Rightarrow (-2)^3 - 12 \cdot (-2) + \alpha = 0 \;; \; -8 + 24 + \alpha = 0 \;; \; \underline{\alpha = -16}.$$

$$f(2)=0 \Rightarrow 2^3 - 12 \cdot 2 + \alpha = 0 \;; \; 8 - 24 + \alpha = 0 \;; \; \underline{\alpha = 16}.$$

De lo anterior se deduce que la función no puede tener las dos soluciones en los puntos $x = -2$ y $x = 2$.

Por otra parte los máximos y mínimos de la función están situados en los siguientes valores de x :

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \;; \; x^2 - 4 = 0 \;; \; \underline{x_1 = -2} \;; \; \underline{x_2 = 2}.$$

$$f''(x)=6x \Rightarrow \begin{cases} f''(-2)=-12 < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo relativo para } x=-2} \\ f''(2)=12 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo relativo para } x=2} \end{cases}.$$

Lo anterior significa que la función es monótona decreciente en el intervalo $(-2, 2)$, lo cual corrobora que, en efecto, la ecuación $x^3 - 12x + \alpha = 0$ no puede tener dos soluciones diferentes en el intervalo $[-2, 2]$, como queríamos probar.

4º) Dada la parábola de ecuación $y = -x^2 - 2x + 3$; sea r su recta tangente en $x = -1$ y sea s su recta tangente en $x = 1$.

a) Calcule las ecuaciones de r y de s.

b) Represente, de forma aproximada, el recinto plano limitado por la parábola, la recta r y la recta s.

c) Calcule el área de dicho recinto.

a)

Los puntos de tangencia de las rectas r y s son los siguientes:

$$y_{(-1)} = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3 = -1 + 2 + 3 = 4 \Rightarrow \underline{A(-1, 4)}.$$

$$y_{(1)} = -1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = -1 - 2 + 3 = 0 \Rightarrow \underline{B(1, 0)}.$$

Las rectas tangentes tienen como pendiente el valor de la derivada para los valores indicados.

$$y' = -2x - 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{Para } x = -1 \Rightarrow m_1 = -2 \cdot (-1) - 2 = 2 - 2 = \underline{0 = m_1} \\ \text{Para } x = 1 \Rightarrow m_2 = -2 \cdot 1 - 2 = -2 - 2 = \underline{-4 = m_2} \end{cases}$$

Las rectas tangentes pedidas son las siguientes:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \Rightarrow \begin{cases} r \Rightarrow y - 4 = 0 \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow \underline{r \equiv y = 4} \\ s \Rightarrow y - 0 = -4 \cdot (x - 1) = -4x + 4 \Rightarrow \underline{s \equiv y = -4x + 4} \end{cases}$$

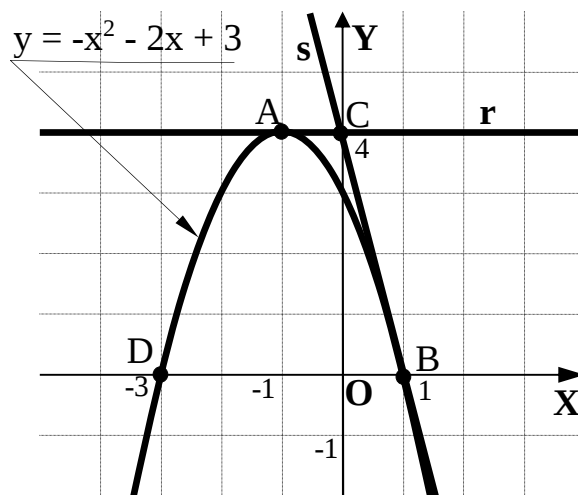
b)

La recta r, que es horizontal, pasa por el punto A(-1, 4).

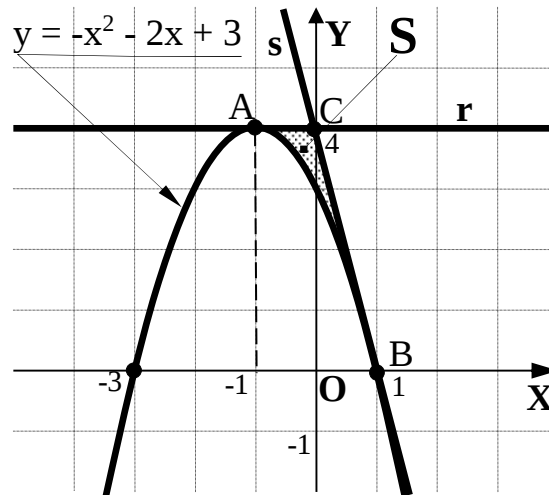
La recta s, además de pasar por el punto de tangencia B(1, 0) también pasa por el punto C(0, -4).

La parábola tiene su máximo en el punto de tangencia A(-1, 4) y corta al eje de abscisas en los puntos B(1, 0) y D(-3, 0).

La representación es la de la figura.



c)



De la observación de la figura se deduce el valor del área pedida, que es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^0 [4 - (-x^2 - 2x + 3)] \cdot dx + \int_0^1 [(-4x + 4) - (-x^2 - 2x + 3)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \cdot dx + \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 =$$

$$= 0 - \left[\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 - 1 \right] + \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 1 \right) - 0 = - \left(-\frac{1}{3} + 1 - 1 \right) + \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3} u^2 = S}}$$

OPCIÓN B

1º) a) Calcule el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

b) Diga, razonadamente, el valor que debe tomar c para que la siguiente función sea

continua: $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ c & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L' Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \frac{e^0}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

b)

La función $f(x)$ es continua en su dominio, que es $\mathbb{R}$, independientemente del valor de c. Para que la función $f(x)$ sea continua para $x = 0$ tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \\ f(0) = c \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \underline{c=1}$$

La función es continua en $x = 0$ para $c = 1$.

2º) a) Calcule la primitiva de la función racional $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

b) Calcule la integral $I = \int \frac{1}{\cos x} \cdot dx$. (puede utilizarse el cambio $t = \sin x$).

a)

$$I = \int \frac{1}{1-x^2} \cdot dx = \int \frac{1}{(1-x)(1+x)} \cdot dx \Rightarrow \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A + Ax + B - Bx}{(1-x)(1+x)} =$$

$$= \frac{(A-B)x + (A+B)}{(1-x)(1+x)} \Rightarrow \left. \begin{matrix} A-B=0 \\ A+B=1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2A=1 \;; \; A=\frac{1}{2} \;; \; B=\frac{1}{2}$$

$$I = \int \left(\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \right) \cdot dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x} \cdot dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x} \cdot dx = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2 = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) = I \quad (*)$$

$$I_1 = \int \frac{1}{1-x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 1-x=t \\ dx=-dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t} \cdot (-dx) = -\int \frac{1}{t} \cdot dt = -Lt = -L|1-x| = I_1$$

$$I_2 = \int \frac{1}{1+x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 1+x=t \\ dx=dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t} \cdot dt = Lt + C = L|1+x| + C = I_2$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de I_1 e I_2 , queda:

$$I = \frac{1}{2} [-L|1-x| + L|1+x|] + C = \frac{1}{2} [L|1+x| - L|1-x|] + C = \frac{1}{2} L \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C = L \sqrt{\left| \frac{1+x}{1-x} \right|} + C = I$$

b)

$$I = \int \frac{1}{\cos x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \sin x = t \rightarrow dt = \cos x \cdot dx \\ \cos x = \sqrt{1-t^2} \;; \; dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{matrix} \right\} \Rightarrow I = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{1-t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{Teniendo en cuenta el apartado anterior}) \Rightarrow I = L \sqrt{\left| \frac{1+t}{1-t} \right|} + C = L \sqrt{\left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right|} + C =$$

$$= L \sqrt{\left| \frac{(1+\sin x)^2}{(1-\sin x)(1+\sin x)} \right|} + C = L \sqrt{\left| \frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x} \right|} + C = L \sqrt{\left| \frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x} \right|} + C = L \left| \frac{1+\sin x}{\cos x} \right| + C =$$

$$= L \left| \sec x + \tan x \right| + C = I$$

También puede hacerse de la forma siguiente:

$$I = \int \frac{1}{\cos x} \cdot dx = \int \sec x \cdot dx = \int \frac{\sec x \cdot (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} \cdot dx \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sec x + \tan x = t \\ dt = (\sec x)(\sec x + \tan x) \cdot dx \end{array} \right\} \Rightarrow I = \int \frac{dt}{t} = L t + C = L \underline{\underline{|\sec x + \tan x|}} + C = I$$

Aclaración de la obtención de dt:

$$t = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow dt = \left[\frac{0 - 1 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} + \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \right] \cdot dx =$$

$$= \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \right) \cdot dx = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} \cdot dx = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1 + \sin x}{\cos x} \cdot dx =$$

$$= \underline{\underline{\sec x \cdot (\sec x + \tan x) \cdot dx = dt}}$$

3º) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule el determinante de A y compruebe la igualdad $|A| = (b-a)(c-a)(c-b)$.

b) ¿Qué relación debe existir entre a, b y c para que el rango de la matriz A sea igual a 1? Justifique la respuesta.

a)

Restando a cada columna la anterior queda:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-b \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-b \\ (b+a)(b-a) & (c+b)(c-b) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-b) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+b \end{vmatrix} = (b-a)(c-b)[(c+b)-(b+a)] =$$

$$(b-a)(c-b)(c+b-b-a) = \underline{\underline{(b-a)(c-a)(c-b) = |A|, \text{ (c.q.c.)}}}$$

b)

Para que la matriz A tenga de rango 1 es necesario que las tres filas o las tres columnas sean linealmente dependientes; esto ocurre cuando $a = b = c$, con lo cual sería:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & a \\ a^2 & a^2 & a^2 \end{vmatrix} = a \cdot a^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^3 \cdot |1 \ 1 \ 1| \Rightarrow \underline{\underline{Rango \ A=1.}}$$

El rango de la matriz A es 1 cuando $a = b = c$.

4º) a) Compruebe que la recta $r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ es perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+z=1$.

b) Calcule los dos puntos de la recta r cuya distancia al plano π es igual a $\sqrt{3}$ unidades.

a)

Una recta es perpendicular al plano cuando el vector director de la recta es linealmente dependiente del vector normal del plano.

El vector director de la recta r es $\vec{v} = (1, 1, 1)$ y el vector normal del plano es el mismo: $\vec{n} = (1, 1, 1)$, por lo que son linealmente dependientes, como cabía esperar.

La recta r y el plano π son perpendiculares como acabamos de comprobar.

b)

Los puntos de la recta r tiene la expresión: $P(1+\lambda, \lambda, \lambda)$.

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano genérico $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula: $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $P(1+\lambda, \lambda, \lambda)$ y al plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$ sabiendo que la distancia es $\sqrt{3}$ unidades:

$$d(P, \pi) = \frac{|1 \cdot (1+\lambda) + \lambda + \lambda|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \sqrt{3} \quad ;; \quad \frac{|1+3\lambda|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3} \quad ;; \quad \frac{|1+3\lambda|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad ;; \quad |1+\lambda| = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+\lambda=3 \rightarrow \lambda_1=2 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(3, 2, 2)}} \\ 1+\lambda=-3 \rightarrow \lambda_2=-2 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(-1, -2, -2)}} \end{cases}$$
