PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

SEPTIEMBRE – 2008

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas.

Cada una de las cuatro cuestiones de la opción elegida puntuará 2’5 puntos como máximo.

Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) a) Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{L(x^2+1)}{x}$.

b) Indica, razonadamente, el valor que debe tomar a para que la siguiente función sea continua: $f(x) = \begin{cases} a & si \;\; a = 0 \\ \frac{L(x^2+1)}{x} & si \;\; x \neq 0 \end{cases}$. (L denota logaritmo neperiano)

----

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{L(x^2+1)}{x} = \frac{L1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x^2+1} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}}$$

b)

Para que la función sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} a = \underline{a} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{L(x^2+1)}{x} = \underline{0} = f(0) \quad (*) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{a = 0}} \qquad \{(*) \;\; Apartado \;\; a)\}.$$

La función es continua en $x = 0$.

****

2º) Calcula la función f(x) cuya gráfica pasa por el punto A(0, 1), es decir: f(0) = 1, y que tiene como derivada la función $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.

$$f(x)=\int f'(x)\cdot dx=\int \frac{2x}{x^2+1}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2+1=t \\ 2x\cdot dx=dt \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t}\cdot dt = Lt+C=$$

$$=\underline{L\left(x^2+1\right)+C=f(x)}.$$

Como el valor de la función es f(0) = 1, tiene que ser:

$$f(0)=1 \Rightarrow L\left(0^2+1\right)+C=1 \;\;;;\;\; L1+C=1 \;\;;;\;\; 0+C=1 \;\;;;\;\; \underline{C=1}$$

$$\underline{\underline{La\quad función\quad pedida\quad es\quad f(x)=L\left(x^2+1\right)+1}}$$

****

3º) a) Define el concepto de rango de una matriz.

b) Determina razonadamente si la tercera fila de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de las dos primeras.

----

a)

Todas las matrices, mediante transformaciones elementales, se pueden transformar en matrices escalonadas.

Una matriz escalonada es aquella en la cual, si tiene filas nulas están situadas en la parte inferior de la matriz y, en las filas no nulas, el primer elemento distinto de cero de una fila está situado más a la derecha que el primer elemento diferente de cero de la fila superior.

El rango de una matriz escalonada es el número de filas no nulas.

El rango de una matriz A es el rango de una matriz escalonada equivalente a A.

También puede definirse el rango de una matriz por su determinante, para lo cual es necesario definir menor de orden k de una matriz que es el determinante de cualquier submatriz cuadrada de orden k que se puede formar con los elementos de la matriz.

El rango de una matriz A es el orden del mayor menor que puede formarse que sea distinto de cero.

b)

Lo pedido es equivalente a demostrar que el vector $\overrightarrow{w}=(2,\ 1,\ 1)$ es linealmente dependiente de los vectores $\overrightarrow{u}=(1,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{v}=(1,\ 2,\ -1)$.

Si el vector $\overrightarrow{w}=(2,\ 1,\ 1)$ es linealmente dependiente de los vectores $\overrightarrow{u}=(1,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{v}=(1,\ 2,\ -1)$ tienen que existir los valores reales $\alpha\ \ y\ \ \beta$, tales que $\overrightarrow{w}=\alpha\cdot\overrightarrow{u}+\beta\cdot\overrightarrow{v}$.

$$\overrightarrow{w}=\alpha\cdot\overrightarrow{u}+\beta\cdot\overrightarrow{v}\ \Rightarrow\ (2,\ 1,\ 1)=\alpha\cdot(1,\ 1,\ 1)+\beta\cdot(1,\ 2,\ -1)\ \Rightarrow\ \begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \alpha+2\beta=1\\ \alpha-\beta=1\end{cases}.$$

De las ecuaciones 1ª y 3ª se deduce que $2\alpha=3\ ;;\ \underline{\alpha=\frac{3}{2}}\ ;;\ \beta=2-\frac{3}{2}=\underline{\frac{1}{2}=\beta}$.

Sustituyendo en la 2ª ecuación los valores obtenidos de $\alpha\ \ y\ \ \beta$:

$$\alpha+2\beta=1\ \Rightarrow\ \frac{3}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=1\ \Rightarrow\ \underline{No\ \ se\ \ satisface}$$

El vector $\overrightarrow{w}$ es linealmente independiente de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y, por tanto:

La tercera fila de la matriz no es combinación lineal de las dos primeras.

****

4º) a) Determina la recta r que pasa por el punto A(1, 1, 1) y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y = 1$.

b) Calcula el punto P donde la recta obtenida corta al plano $\pi \equiv x + y = 1$.

----

a)

Un vector normal al plano π es $\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ 0)$.

Por ser la recta r perpendicular al plano, su vector director es el mismo que el normal al plano.

Una expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 \end{cases}$.

b)

El punto de corte de la recta r y el plano π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 \end{cases} \\ \pi \equiv x + y - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1+\lambda) + (1+\lambda) - 1 = 0 \ ;; \ 2\lambda = -1 \ ;; \ \lambda = -\frac{1}{2} \ \Rightarrow \ P\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right).$$

****

OPCIÓN B

1º) Halla los puntos de la curva $y = x^3 - 2x^2 + 1$ donde la recta tangente es paralela a la recta $r \equiv y + x - 2 = 0$.

La recta r puede expresarse de la forma $r \equiv y = -x + 2$, cuya pendiente es m = -1.

La derivada a una curva en un punto es el valor de la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.

$$y' = 3x^2 - 4x \;\Rightarrow\; y' = m \;\Rightarrow\; 3x^2 - 4x = -1 \;;;\; 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} = \frac{2 \pm 1}{3} \;\Rightarrow\; \underline{x_1 = 1} \;;;\; \underline{x_2 = \frac{1}{3}}$$

Los puntos de tangencia pedidos son los siguientes:

$$y(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{T_1(1,\ 0)}}$$

$$y\left(\tfrac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + 1 = \frac{1 - 6 + 27}{27} = \frac{22}{27} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{T_2\left(\frac{1}{3},\ \frac{22}{27}\right)}}$$

****

2º) a) Define el concepto de primitiva de una función.

b) Di, razonando la respuesta, si las funciones $F_1(x) = sen^2\ x$ y $F_2(x) = -\cos^2\ x$ son primitivas de una misma función.

----

a)

La función F(x) es una función primitiva de la función f(x) en el intervalo cerrado $[a,\ b]$, cuando $F'(x) = f(x),\ \ \forall x \in [a,\ b]$.

Si F(x) es una función primitiva de f(x) y C es una constante, la función $F(x) + C$ también es una primitiva de f(x), lo cual significa que una función tiene infinitas funciones primitivas, todas aquellas que se diferencian en una constante de f(x).

b)

$$\left.\begin{array}{l} \underline{F_1'(x) = 2 \cdot sen\ x \cdot \cos\ x = sen\ 2x} \\ \\ F_2'(x) = -[2 \cdot \cos\ x \cdot (-sen\ x)] = \underline{2 \cdot sen\ x \cdot \cos\ x = sen\ 2x = F_2'(x)} \end{array}\right\} \Rightarrow F_1'(x) = F_2'(x)$$

<u>Las funciones F_1'(x) y F_2'(x) son primitivas de la misma función: f(x) = sen (2x).</u>

****

3º) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax+ay=0 \\ x+z=a \\ -2y+az=a \end{cases}$, según el valor del parámetro a.

No es necesario resolver el sistema en ningún caso.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & a \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & -2 & a & a \end{pmatrix}$$

El rango de M en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & a \end{vmatrix}=2a-a=\underline{a=0}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a\neq 0 \Rightarrow Rango\; M = Rango\; M'=3=n^{o}\; incógnitas \Rightarrow Compatible\; determinado}}$$

$$Para \;\; a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ equivalente a } M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a=0 \Rightarrow Rango\; M = Rango\; M'=2<n^{o}\; incóg. \Rightarrow Compatible\; Indeterminado}}$$

****

4º) a) Determina el plano π que pasa por el punto P(1, 1, 1) y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$.

b) Calcula el punto P donde se cortan la recta r y el plano π.

----

a)

El vector director de la recta r es $\overrightarrow{v} = (2,\ 1,\ 1)$.

El vector normal del plano puede ser cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector director de la recta, por ejemplo, el mismo: $\overrightarrow{n} = (2,\ 1,\ 1)$.

La ecuación del haz de planos paralelos al plano pedido tiene una expresión general de la forma $\alpha \equiv 2x + y + z + D = 0$.

De los infinitos planos que forman el haz, el plano π buscado es el que contiene al punto P(1, 1, 1), por lo cual tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv 2x + y + z + D = 0 \\ P(1,\ 1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2 \cdot 1 + 1 + 1 + D = 0\ \ ;;\ \ \underline{D = -4}\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\underline{\pi \equiv 2x + y + z - 4 = 0}}.$$

b)

El punto P de corte de la recta r y el plano π es la solución del sistema que forman.

La expresión de r por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}\ \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2y \\ x - 1 = 2z + 2 \end{cases} \Rightarrow\ \underline{r \equiv \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases}}.$$

El sistema que forman es $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 1 \\ x - 2z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \end{array}\right\}$. Resolviendo por la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{16 + 2 + 6}{8 + 2 + 2} = \frac{24}{12} = \underline{2 = x} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{3 - 4 + 8 - 1}{12} = \frac{4}{12} = \underline{\frac{1}{3} = y}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{12} = \frac{1-12-3+8}{12} = \frac{-6}{12} = \underline{-\frac{1}{2} = z}$$

$$\underline{\underline{P\left(2,\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{2}\right)}}$$

****